Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 27. ledna 2021

Početní část

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice. Najděte její maximální řešení splňující danou počáteční podmínku:

$$y' = x \cdot \sqrt{y}, \quad y(0) = 2$$

[**15** bodů]

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení:

$$y' = (1 - \cos y) \cdot \sqrt[5]{y^3 - y^2 + y - 1}$$

[**15** bodů]

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice:

$$y' - \frac{2\sin x}{\cos x} y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

[**20** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 27. ledna 2021

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte Dirichletovo kritérium konvergence nekonečných řad. [**2** body]

(b) Vysvětlete, co rozumíme pojmem fundamentální systém. [**2** body]

(c) Zformulujte srovnávací a limitní srovnávací kritérium konvergence integrálu. [**3** body]

(d) Definujte limitu posloupnosti komplexních čísel. [**2** body]

Úloha B.

(a) Dokažte, že $C(a,b) \supseteq C^1(a,b) \supseteq C^2(a,b) \supseteq \ldots \supseteq C^\infty(a,b)$. Množiny definujte. [**5** bodů]

(b) Nechť p a q jsou spojité funkce na intervalu (a,b). Dokažte, že každé řešení rovnice $y' + py = q$, které je definované na (a,b), má na (a,b) spojitou derivaci. [**5** bodů]

(c) Dokažte, že nekonečná řada tvaru $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$. [**4** body]

Úloha C.

(a) Rovnici $y' = h(x)g(y)$ převádíme do tvaru $\frac{y'}{g(y)} = h(x)$ a pak integrujeme. Vysvětlete, v jakém smyslu „integrujeme levou stranu podle y a pravou stranu podle x“, resp. proč je tento postup v pořádku. [**3** body]

(b) Dokažte (s použitím nám známých faktů) konvergenci nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}} \cdot \sin n.$$ [**4** body]

(c) Popište všechna maximální řešení rovnice $y' = \operatorname{sgn} y$ a nakreslete obrázek. Nezapomeňte vyšetřit možnosti lepení. [**4** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Napište obecnou homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty. Dokažte, že množina všech jejích maximálních řešení tvoří vektorový prostor dimenze n. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte integrální kritérium konvergence nekonečných řad. [**12** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.