Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 5. termín dne 9. února 2021

Početní část

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice:

$$\frac{y'}{y+2} = xy. \qquad [\mathbf{20}\ \text{bodů}]$$

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení:

$$y' = \sqrt{y^2-2}\cdot(y^2-9). \qquad [\mathbf{15}\ \text{bodů}]$$

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice:

$$y' + 3x^2y - e^{x-x^3}\cos x = 0. \qquad [\mathbf{15}\ \text{bodů}]$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 5. termín dne 9. února 2021

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu v nejobecnějším tvaru a definujte pojem řešení takové rovnice. [**2** body]

(b) Definujte prodloužení řešení a maximální řešení diferenciální rovnice. [**2** body]

(c) Zformulujte Peanovu větu o existenci řešení jistého typu diferenciální rovnice. [**2** body]

(d) Zformulujte integrální kritérium konvergence řad. [**2** body]

(e) Definujte parciální derivace funkce dvou proměnných. [**2** body]

Úloha B.

(a) Uvažujme nějaké řešení y úlohy $y' = g(y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.
Dokažte, že pokud $g(y_0) < 0$, pak je funkce y na svém definičním oboru nerostoucí. [**3** body]

(b) Definujte množiny funkcí $C(a,b)$, $C^k(a,b)$ $(k \in \mathbb{N})$, $C^\infty(a,b)$ a dokažte, že se (s vhodnými operacemi) jedná o vektorové prostory. Můžete se opřít o fakt, že množina všech reálných funkcí na (a,b) tvoří vektorový prostor. [**6** bodů]

(c) Nechť y je řešení diferenciální rovnice tvaru $y' = g(y)$ na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Dokažte, že pak $y_c(x) := y(x-c)$ je rovněž řešení. Nezapomeňte upřesnit interval, na kterém se jedná o řešení. [**5** bodů]

Úloha C.

(a) Napište obecnou lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty. Dokažte, že každé její řešení je třídy C^n. [**5** bodů]

(b) Napište definici limity posloupnosti komplexních čísel a dokažte, že pro $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{C}$ jest $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, právě když $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = \mathrm{Re}(z)$ a zároveň $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \mathrm{Im}(z)$. [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Napište obecnou homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty. Dokažte, že množina všech jejích maximálních řešení tvoří vektorový prostor dimenze n. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte srovnávací kritérium pro konvergenci určitého integrálu a s jeho pomocí dokažte limitní verzi tohoto kritéria (kterou také zformulujte). [**10** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.