Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 6. termín dne 16. února 2021

Početní část

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice. Najděte její maximální řešení splňující danou počáteční podmínku:

$$y' = (1 + y^2)\,\mathrm{tg}\,x, \quad y(0) = 1$$ [**15** bodů]

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení:

$$y' = \sqrt{|y^3 - 1|} \cdot \mathrm{arctg}\,y.$$ [**15** bodů]

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následujících lineárních rovnic:

$$y' + xy = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$ [**10** bodů]

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$ [**10** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 6. termín dne 16. února 2021

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte Peanovu větu o existenci řešení jistého typu diferenciální rovnice. [**2** body]

(b) Zformulujte větu o řešení tvaru množiny řešení (homogenní i nehomogenní) lineární rovnice n-tého řádu. [**3** body]

(c) Vysvětlete, co rozumíme pojmem fundamentální systém. [**2** body]

(d) Zformulujte kritéria Abelovo a Dirichletovo (pro konvergenci nekonečných řad). [**3** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte srovnávací kritérium konvergence Zobecněného Riemannova integrálu. Stačí dokázat existenci $\int_a^b |f|$, nemusíte dokazovat existenci $\int_a^b f$. [**6** bodů]

(b) Dokažte, že $C(a,b) \supseteq C^1(a,b) \supseteq C^2(a,b) \supseteq \ldots \supseteq C^\infty(a,b)$. Množiny definujte. [**5** bodů]

(c) Dokažte, že nekonečná řada tvaru $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$. [**4** body]

Úloha C.

(a) Dokažte, že řada $\sum_{n=1}^\infty \sin(tn)$ má omezenou posloupnost částečných součtů ($t \in \mathbb{R}$). [**5** bodů]

(b) Nakreslete obrázek zachycující chování všech řešení rovnice $y' = \operatorname{sgn} y$. Je možné lepit? [**4** body]

Úloha D.

Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Napište obecnou homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty. Dokažte, že množina všech jejích maximálních řešení tvoří vektorový prostor dimenze n. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte integrální kritérium konvergence nekonečných řad. [**12** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.