Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 7. termín dne 23. února 2021

Početní část

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice:

$$y' = \frac{e^y}{x(1+x^2)}.$$ [**15** bodů]

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení:

$$y' = \frac{\ln(y+6)\sqrt[3]{y}}{y^5+32}.$$ [**15** bodů]

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následujících lineárních rovnic a u první rovnice navíc maximální řešení splňující danou počáteční podmínku.

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x^2, \qquad y(1) = \pi.$$ [**10** bodů]

$$y^{(4)} = y.$$ [**10** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 7. termín dne 23. února 2021

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu v nejobecnějším tvaru a definujte pojem *řešení* takové rovnice. [**2** body]

(b) Zformulujte integrální kritérium konvergence řad. [**2** body]

(c) Vysvětlete, co rozumíme pojmem fundamentální systém. [**2** body]

(d) Definujte parciální derivace funkce dvou proměnných. [**2** body]

(e) Definujte limitu posloupnosti komplexních čísel. [**2** body]

Úloha B.

(a) Uvažujme nějaké řešení y úlohy $y' = g(y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Dokažte, že pokud $g(y_0) < 0$, pak je funkce y na svém definičním oboru nerostoucí. [**3** body]

(b) Nechť p a q jsou spojité funkce na intervalu (a, b). Dokažte, že každé řešení rovnice $y' + py = q$, které je definované na (a, b), má na (a, b) spojitou derivaci. [**5** bodů]

(c) Buď g spojitá na $[a, b]$, kladná na $[a, b)$ a $g(b) = 0$. Nechť $g'_-(b) \in \mathbb{R}$. Dokažte, že za těchto předpokladů platí $\left|\int_a^b \frac{1}{g}\right| = \infty$. [**4** bodů]

Úloha C.

(a) Dokažte (s použitím nám známých faktů a kritérií) konvergenci nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arccotg} n \cdot \sin n.$$ [**4** body]

(b) Zformulujte a dokažte Moivreovu větu o mocnění komplexních čísel. [**4** bodů]

(c) Popište všechna maximální řešení rovnice $y' = \operatorname{sgn} y$ a nakreslete obrázek. Nezapomeňte vyšetřit případné možnosti lepení. [**4** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte lemma, které říká, že (za jistých předpokladů) hodnoty maximálního řešení autonomní rovnice pokrývají celý interval (a, b). [**16** bodů]

Nebo:

(b) Dokažte, že každé řešení autonomní diferenciální rovnice je monotónní. [**16** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.