

MA4 – ZÁPOČTOVÉ ÚLOHY

Úlohy označené hvězdičkou nejsou povinné (nemusí ale být těžší).

1 Načrtněte vrstevnice funkce f pro dané hodnoty:

(a) $f(x, y) = -(x - 1)^2 - y^2 + 1$; hodnoty 2, 1, 0, -3, -8;

(b) $f(x, y) = 2y^2 - x + 1$; hodnoty 0, 1, 2.

2 Nechť $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ a $g(x, y) = x + 5y + 7$.

(a) Napište rovnici té vrstevnice funkce f , která obsahuje bod $(\sqrt{8}, \sqrt{2})$.

(b) Napište parametrizaci $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ této vrstevnice pomocí funkcí \sin a \cos .

(c) Napište složení $g \circ \varphi$ a metodami prvního semestru najděte extrémy této funkce na jejím definičním oboru.

3 Vyšetřete následující limity (existenci a případnou hodnotu) a své kroky a závěry nezapomeňte stručně vysvětlit.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \frac{x^2 + y^2}{x + 2y + 3}$;

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

* (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$;

* (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

4 Připomeňte si, že spojité první parciální derivace zaručují existenci totálního diferenciálu, a tedy i gradientu. Spojitost vyšetřujeme podobně jako v prvním semestru.

Pomocí zmíněných poznatků *dokažte existenci gradientu* a napište rovnici tečné nadroviny následující funkce f v bodě a . Napište v tomto bodě derivace podle vektoru v a ve směru vektoru v .

(a) $f(x, y) = 50x^2 - 40x + 25y^4 + 10xy$, $a = (1, -1)$, $v = (4, -3)$;

(b) $f(x, y) = e^{x^2+3y^2} \cdot \cos y$, $a = (0, \pi/4)$, $v = (123 \cdot \pi \cdot e, 0)$;

5 Pomocí řetízkového pravidla řešte následující úlohy:

- (a) Spočtete $\frac{\partial z}{\partial v}$, jestliže $z = x^2 + 2xy$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.
- (b) Jestliže $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$, $x = r + s$, $y = r - s$, $z = 2rs$, spočtete $\frac{\partial w}{\partial r}$ a $\frac{\partial w}{\partial s}$. Správnost výsledku získaného pomocí řetízkového pravidla ověřte výpočtem jinou metodou.
- * (c) Nechť $w = f(x, y)$ je funkce se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu. Uvažujme polární souřadnice $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Spočtete $\frac{\partial w}{\partial r}$ a $\frac{\partial w}{\partial \theta}$. V jakém smyslu je w „tu funkcí x, y , tu zase funkcí r, θ “?

6 Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$.

7 Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M , jestliže:

- (a) $f(x, y) = 2x + 4y$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$;
- * (b) $f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.