Axiom Výběru (AC)

(AC) … axiom of choice.

$$\underbrace{(ZF)}_{\text{už známe.}} + (AC) = (ZFC)$$

(AC) … z filosofických důvodů poněkud diskutabilní: zatímco ax. (ZF) umožňují „konstruovat množiny" dobře intuitivně představitelnými způsoby (suma, potence, dvojice, vydělení atd.), (AC) je tak trochu deus ex machina; nedává představu procesu „konstrukce".

Občas: Důkazy s (AC) … „nekonstruktivní".

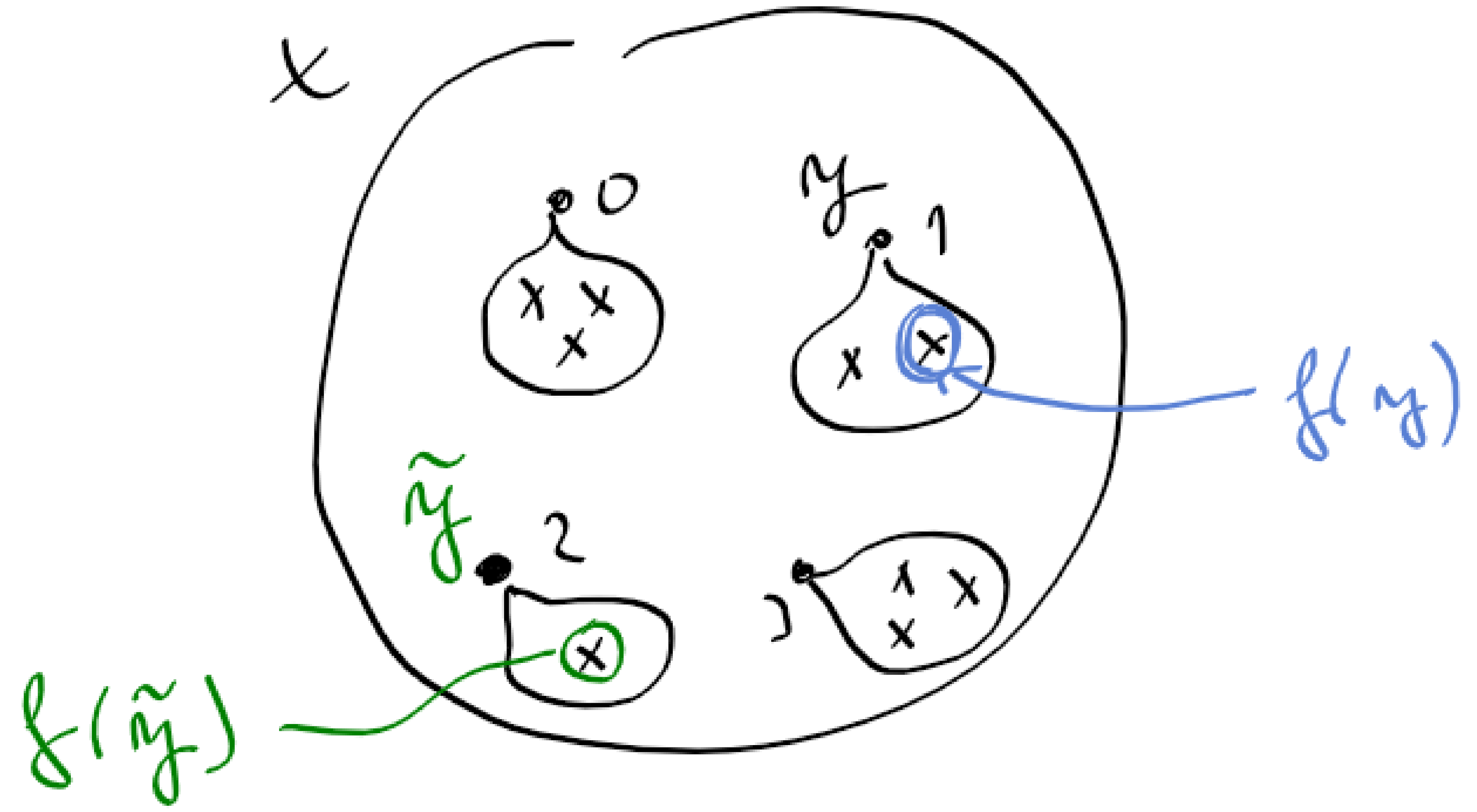
(AC) … základní formulace:

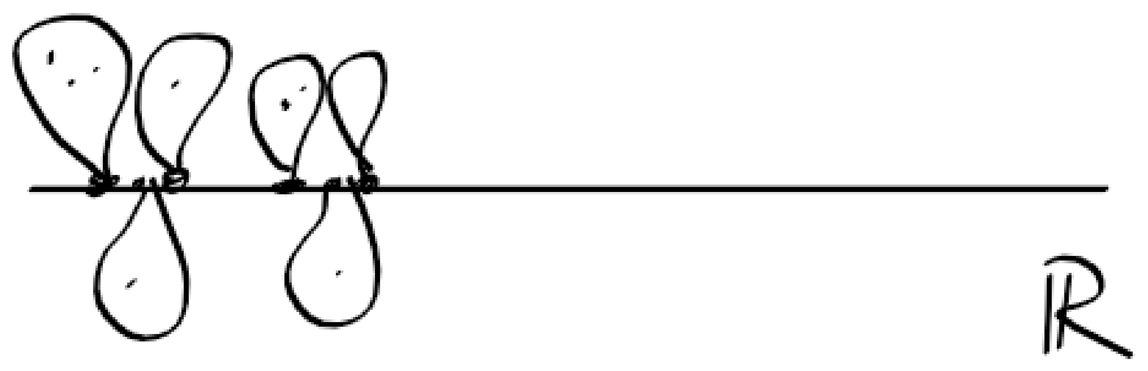
$\boxed{\text{Na každé množině existuje selektor.}}$

Definice: Buď x libovolná množina. Funkce $f: x \longrightarrow \bigcup x$ se nazve *selektor*, pokud

- $(\forall y)\ y \in x \wedge y \neq \emptyset \longrightarrow f(y) \in y$. Tj.

- $(\forall \emptyset \neq y \in x)\ f(y) \in y$.





Příklad: • (AC) $\longrightarrow$ $\forall X$ VP $\exists B \subseteq X$

B je báze.

• **Heineho věta**:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff$$

$$\left[\forall (a_n) \subseteq \mathbb{R} : (a_n) \text{ splňuje } (H1) \wedge (H2) \longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = A \right]$$

(H1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

(H2) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq a$.

Důkaz: $(\Rightarrow)$ jednoduché na „ε-δ".

$(\Leftarrow)$ Sporem. Nechť $\neg\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = A\right)$

Tj. $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in P(a,\delta) : f(x) \notin B(A,\varepsilon)$.

Chceme zkonstruovat posl. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující (H1) $\wedge$ (H2), pro kterou

$$\neg\left(\lim (a_n) = A\right).$$

Budeme indukcí (přesněji rekurzí) definovat posl (a_n).

$\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta = \frac{1}{n}$ ... $\exists a_n \in P(a,\delta)$

...

Vybíráme $a_n \in P(a, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$

z nekonečné mnoha množin! $\longrightarrow$ AC

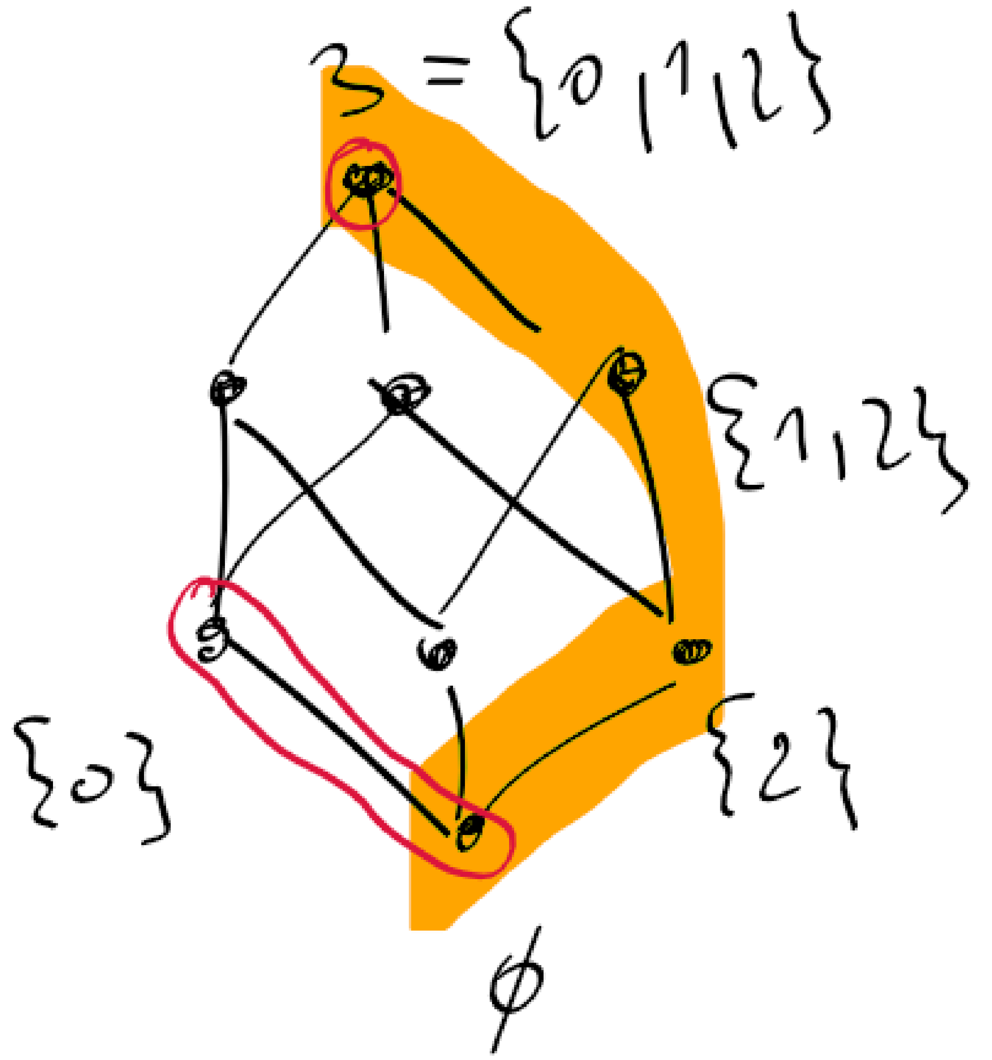
Zornovo lemma $\longleftrightarrow$ (AC)

(PM) … princip maximality

(PM) $\longleftrightarrow$ (AC). (Bez dk.)

Definice: Buď $(A, \leq)$ uspořádaná množina. Řekneme, že $C \subseteq A$ je řetězec, pokud $(C, \leq)$ je lineární usp.

Příklad: $(P(3), \subseteq)$ není lineární usp.



$C = \{\emptyset, \{0\}, 3\}$ je řetězec.

(PM): Je-li $(A, \leq)$ uspořádání, ve kterém každý řetězec má majorantu (tj. horní závoru), potom $(A, \leq)$ má pro každé $a \in A$ maximální prvek $m \geq a$.

Věta: $\forall X$ VP $\exists B \subseteq X$: B je báze.

Důkaz: Uvažujme $\mathcal{L} = \{L \subseteq X : L \text{ je LNZ}\}$. $(\mathcal{L}, \subseteq)$ je uspořádaná množina: Cv.

Chceme najít $M \in \mathcal{L}$ maximální.

- ukázal, že M je báze (Cv.)

→ Pomocí (PM):

Budiž $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$ libovolný řetězec.

Musíme ověřit, že $\mathcal{C}$ má h. z.

Platí (protože $\mathcal{C}$ je řetězec), že

$$\forall K, L \in \mathcal{L} : \quad K \subseteq L \ \vee \ L \subset K \vee L = K.$$

Tvrdím, že $\underbrace{\bigcup \mathcal{C}}_{H}$ je h. z. $\mathcal{C}$.

Zřejmě $H \supseteq L$ pro lib. $L \in \mathcal{C}$.

Chceme $H \in \mathcal{L}$ (kdybychom, tak to nemůže být h. z. $(\mathcal{L}, \subseteq)$).

Tj. chceme, že H je LNZ.

Závěr: (PM) $\Rightarrow \exists$ maximální prvek $M \in \mathcal{L}$.

Nechť $v_1, \dots, v_n \in H, = \bigcup \mathcal{C}$
$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0.$$

Chci: $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

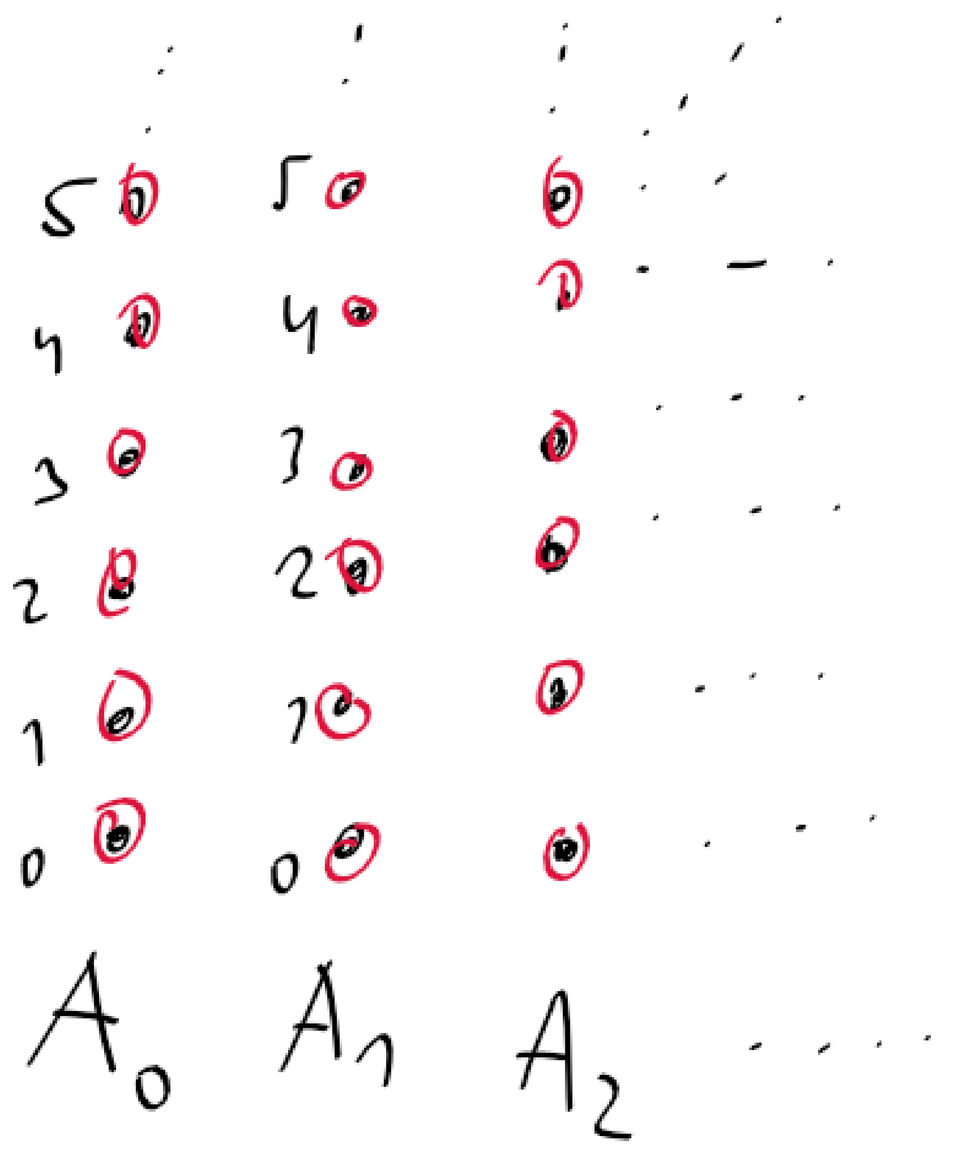
Najdeme $L_1, L_2, \dots, L_n \in \mathcal{C}$, že
$v_1 \in L_1, \ v_2 \in L_2, \dots, v_n \in L_n$

$L_1, \dots, L_n$ jsou lineárně usp., je jich konečně mnoho, takže je jasné, že ex. maximum: $\tilde{L} = \max(L_1, \dots, L_n) =$
$= L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$.

Tedy $v_1, \dots, v_n \in \tilde{L}$ ale $\tilde{L}$ je LNZ, a tedy musí být $c_1 = c_2 = \dots c_n = 0$.

Význam (AC):

- Pokud $A_0, A_1, A_2, \dots$ jsou spočetné mn., tak $\bigcup_{i\in\omega} A_i$ je spočetná.



$$\approx \underbrace{\omega \times \omega \overset{\text{víme}}{\approx} \omega}_{\text{bez (AC)}}$$

Teď už to jaké je, napsat bijekci je lehké.

tak, že je lze přeskládat, aby vznikla plná koule o 2-násobném poloměru.

- $\exists$ lebesgueovsky neměřitelná $\subseteq \mathbb{R}$
- Lebesgueova míra na $\mathbb{R}$ je σ-aditivní.
- $\forall$ těleso má alg. zúplnění
- $\preccurlyeq$ je trichotomická na V

(tj. $\forall A\ \forall B\ \exists f$: $f: A \to B$ je prosté $\vee$ $f: B \to A$ je prosté)

Paradoxy:
- $(\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R})(\forall I \subseteq \mathbb{R}$ interval$)$ $f[I] = \mathbb{R}$.
- $(\exists X \subseteq \mathbb{R}^2)(\forall \ell \subseteq \mathbb{R}^2$ přímka$)$: $\ell \cap X \approx 2$
- Banach–Tarského „paradox": Plnou kouli v $\mathbb{R}^3$ lze rozložit na konečně mnoho částí,