Řešení početní části zkouškové písemky z 26.5.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

do Laurentovy řady

a) v prstencovém okolí bodu i (specifikujte přesně v jakém),

b) v okolí nekonečna (specifikujte přesně v jakém).

Řešení:

a) Prvním krokem je úprava výrazu $f(z)$ tak,[1] aby obsahoval členy $(z-i)$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i+z-i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\,.$$

Poslední složený zlomek je součtem geometrické řady s kvocientem $\left(-\frac{z-i}{2i}\right)$, pokud je tento v absolutní hodnotě menší než jedna, tj. pro $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$ neboli $|z-i| < 2$. Pro tato z je

$$\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n ,$$

a tedy celkově (díky faktoru $\frac{1}{z-i}$ musí být $z \neq i$, tj. $|z-i| > 0$):

$$f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}}(z-i)^n , \quad 0 < |z-i| < 2\,.$$

b) Podobný trik jako výše: musíme však zlomek upravit tak, aby součet geometrické řady platil pro kvocient, který má z ve jmenovateli, sledujte proč:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \cdots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}}\,,$$

třetí rovnost je součet geometrické řady s kvocientem $\left(-\frac{1}{z^2}\right)$, a tedy platí pro $\left|\frac{1}{z^2}\right| < 1$, tj. pro $|z| > 1$, což přesně chceme.

---

[1] Komu se nelíbí čarování s geometrickými řadami, může Laurentovy koeficienty počítat pomocí vzorce pro ně: pokud je γ uzavřená jednoduchá křivka, která oběhne z_0 v kladném smyslu (a žádnou jinou singularitu f neoběhne), je $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$, který v našem případě dá

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)(z-i)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{1}{(z^2+1)(z-i)^{n+1}} = \operatorname{Res}_i \frac{1}{(z+i)(z-i)^{n+2}}\,,$$

druhá rovnost je reziduová věta. Zkuste to dopočíst, mělo by vyjít totéž.

2. [10b] Spočtěte integrál

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^2}{3+2\cos x}\,dx$$

pomocí reziduové věty. Výpočet okomentujte (odůvodněte) s odvoláním na tuto větu.

Řešení:
Jde o standardní typ integrace „racionální funkce v sinech a kosinech přes interval délky 2π“. Integrál se převede na křivkový komplexní integrál přes obvod jednotkového kruhu z funkce

$$\frac{1}{iz}\cdot\frac{\left(1+z+\frac{1}{z}\right)^2}{\left(3+z+\frac{1}{z}\right)}\,.$$

Podle reziduové věty

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^2}{3+2\cos x}\,dx = 2\pi \sum_{|z_0|<1} \operatorname{Res}_{z_0} \frac{(z^2+z+1)^2}{z^2\,(z^2+3z+2)}\,,$$

protože funkce $f(z) := \frac{(z^2+z+1)^2}{z^2\,(z^2+3z+2)}$ je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou tří izolovaných singularit, z nichž žádná neleží na obvodu jednotkového kruhu. Kořeny kvadratického polynomu ve jmenovateli jsou totiž $\frac{-3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, z nich pak leží uvnitř jednotkového kruhu pouze $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Počítáme tedy reziduum (označme jej R_2) v tomto bodě (je tam jednoduchý pól f) a v nule (dvojnásobný pól f), toto reziduum označíme R_1.
Reziduum v nule spočteme podle vzorce pro reziduum ve dvojnásobném pólu: f násobíme výrazem z^2, jednou zderivujeme, podělíme 1! a dosadíme nulu. Zamyslíme-li se nad tím, co znamená dosadit nulu, můžeme s výhodou po derivování psát nulu místo všech členů, které obsahují nějaké z (tj. „vynechat je“):

$$R_1 := \left(\frac{(z^2+z+1)^2}{z^2+3z+2}\right)'\Bigg|_{z=0} = \frac{2(0+0+1)(0+1)(0+0+1)-(0+0+1)^2(0+3)}{(0+0+1)^2} = \frac{2-3}{1} = -1\,.$$

Reziduum v $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ dá trochu víc práce: díky jednonásobnosti kořene ve jmenovateli sice můžeme využít pravidlo „dosaď do holomorfního čitatele a do derivace jmenovatele“, ale kořen sám je trochu nepříjemný. Ale ne moc:

$$R_2 := \frac{(z^2+z+1)^2}{z^2\,(2z+3)}\Bigg|_{z=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\left(\frac{9-6\sqrt{5}+5}{4}+\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+1\right)^2}{\frac{14-6\sqrt{5}}{4}\sqrt{5}} = \cdots = \frac{28-12\sqrt{5}}{7\sqrt{5}-15}\,,$$

samozřejmě to dá trochu úprav. Celkově je tedy výsledek

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos x)^2}{3+2\cos x}\,dx = 2\pi(R_1+R_2) = 2\pi\frac{43-19\sqrt{5}}{7\sqrt{5}-15} = \cdots = \frac{8\pi}{\sqrt{5}} - 2\pi\,.$$

Poslední rovnost dostanete tak, že zlomek rozšíříte výrazem $(7\sqrt{5}+15)$.

3. [12b] Spočtěte (Fresnelovy) integrály

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx\,, \qquad \int_0^\infty \sin x^2\, dx\,.$$

Návod: Integrujte funkci e^{iz^2} přes obvod kruhové výseče o středovém úhlu $\frac{\pi}{4}$ a poloměru R, která leží v prvním kvadrantu, a jedním svým ramenem na reálné ose (zadávající vám nakreslí obrázek na tabuli). Odůvodněte celý výpočet s odvoláním na příslušné věty, které používáte. Pokud je potřeba ukázat, že jistý integrál jde k nule, ukažte to.

Řešení: Integrační křivka je tedy $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 - \varphi_3$, kde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t\,, & t &\in (0,R)\,,\\ \varphi_2(t) &= Re^{it}\,, & t &\in \left(0,\frac{\pi}{4}\right)\,,\\ \varphi_3(t) &= te^{i\frac{\pi}{4}}\,, & t &\in (0,R)\,. \end{aligned}$$

Protože integrovaná funkce je holomorfní v celé komplexní rovině, je podle reziduové věty (nebo také podle Cauchyovy věty)

$$\int_{\varphi_1} e^{iz^2}\, dz + \int_{\varphi_2} e^{iz^2}\, dz - \int_{\varphi_3} e^{iz^2}\, dz = 0\,. \tag{1}$$

Ukážeme, že integrál přes křivku φ_2 jde k nule, pokud $R \to +\infty$:

$$\left|\int_{\varphi_2} e^{iz^2}\, dz\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|Rie^{it}e^{iR^2e^{2it}}\right|\, dt = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\mathrm{Re}(iR^2e^{2it})}\, dt = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2t}\, dt\,.$$

V tomto integrálu můžeme buď poslat $R \to +\infty$ (ale to je limita podle parametru, takže potřebujeme integrabilní majorantu nezávislou na R, uměli byste ji najít? Napovím: na kompaktním intervalu integrace stačí najít konstantu), nebo je možno (standardně) odhadnout na intervalu $(0, \frac{\pi}{4})$ funkci $\sin 2t \ge \frac{4}{\pi}t$, tj. $-R^2 \sin 2t \le -R^2\frac{4}{\pi}t$. Tímto odhadem dostanete integrál, který lze vypočítat a poté teprve poslat $R \to +\infty$. V každém případě jde integrál přes křivku φ_2 k nule, a tedy podle (1) dostaneme

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_1} e^{iz^2}\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_3} e^{iz^2}\, dz\,. \tag{2}$$

Vyčíslením obou těchto integrálů dostaneme:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_1} e^{iz^2}\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{it^2}\, dt = \left(\text{v.p.}\int_0^\infty \cos t^2\, dt\right) + i\left(\text{v.p.}\int_0^\infty \sin t^2\, dt\right) \tag{3}$$

a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_3} e^{iz^2}\, dz = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{i\frac{\pi}{4}} e^{it^2 e^{i\frac{\pi}{2}}}\, dt = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1+i)\,, \tag{4}$$

pokud považujeme hodnotu Gaussova integrálu $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ za známou. Porovnáním reálné a imaginární části (3) a (4) dostaneme, že oba hledané (slavné Fresnelovy) integrály mají stejnou hodnotu:

$$\text{v.p.}\int_0^\infty \cos t^2\, dt = \text{v.p.}\int_0^\infty \sin t^2\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,.$$

Vnímavější z vás si jistě všimli, že integrály nejsou definovány jako Lebesgueovy (uměli byste si rozmyslet, že jako Lebesgueovy neexistují?), ale jako integrály ve smyslu hlavní hodnoty, čili zobecněné Lebesgueovy, tj. ve smyslu $\lim_{R\to+\infty} \int_0^R$.