Řešení početní části zkouškové písemky z 30.5.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Rozviňte funkci $e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) do Fourierovy řady v Hermiteových polynomech. Ukažte ovšem nejprve, že zadaná funkce patří do prostoru, ve kterém je tento systém polynomů úplným ON systémem. K výpočtům můžete použít tabulku systémů ON polynomů, která byla rozdávaná na přednášce, všechny informace v ní uvedené považujte za známé.

Řešení:

a) Musíme zjistit, zda $e^{\alpha x} \in L^2_{e^{-x^2}}(-\infty, \infty)$, tj. zda je konečný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{\alpha x})^2 e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\alpha x - x^2}\, dx = e^{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\, dx\,.$$

Výsledný integrál evidentně konverguje, dokonce (například po substituci $y = x - \alpha$) je vidět, že výsledek výpočtu je $e^{\alpha^2}\sqrt{\pi}$.

b) Hledáme koeficienty c_n tak, aby platilo

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Z teorie abstraktních Fourierových řad plyne, že

$$c_n = \frac{(e^{\alpha x}, H_n(x))_{e^{-x^2}}}{\|H_n(x)\|^2_{e^{-x^2}}} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} e^{-x^2} e^{x^2} (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\, dx\,. \tag{2}$$

Integrál v (2) budeme počítat opakovanou metodou per partes. Po prvním per partes dostaneme:

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\, dx &= \left[(-1)^n e^{\alpha x} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\right]_{-\infty}^{\infty} - (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\alpha x})' \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\, dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\alpha x})' \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\, dx\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Hraniční člen je nulový, protože obsahuje člen e^{-x^2} (a člen $e^{\alpha x}$, a polynom, který vznikne proderivováním; ale tyto členy jsou v nekonečnech přetlačeny Gaussovou exponencielou e^{-x^2}). Opakovaným použitím per partes dostaneme postupně

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\, dx &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\alpha x})' \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2})\, dx = \dots\,. \\ \dots &= (-1)^{n+n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(e^{\alpha x}) e^{-x^2}\, dx = \alpha^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} e^{-x^2}\, dx = \\ &= \alpha^n e^{\frac{\alpha^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\frac{\alpha}{2})^2}\, dx = \alpha^n e^{\frac{\alpha^2}{4}} \sqrt{\pi}\,. \end{aligned}$$

Tedy podle (2) je

$$c_n = \frac{\alpha^n e^{\frac{\alpha^2}{4}} \sqrt{\pi}}{2^n n! \sqrt{\pi}} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \frac{e^{\frac{\alpha^2}{4}}}{n!}$$

a podle (1)

$$e^{\alpha x} = e^{\frac{\alpha^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n \frac{H_n(x)}{n!}\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

---

2. [12b] Spočtěte integrály

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx\,, \qquad\qquad \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

pomocí reziduové věty. Jde-li o některé z typů integrace, probíraných na přednášce, uveďte pouze postup, jakým se takové integrály počítají (tj. jaká funkce se integruje po jaké křivce, jaké musí mít tato funkce vlastnosti, aby jistá část integrálu šla k nule a jaký vzorec pro výpočet integrálu z toho vypadne). Pokud toto správně uvedete, nemusíte dokazovat, že ona jistá část integrálu jde k nule, pouze ověříte, že vaše funkce splňuje podmínky, které od ní požadujete.

Řešení:
Jednou z možností (byly i jiné) bylo použít postupu z přednášky, kde se integrovala funkce typu $f(z)\ln^2 z$ po obvodu „téměř celého mezikruží" o poloměrech ε a R. Pokud je funkce f holomorfní na celé komplexní rovině s výjimkou konečně mnoha bodů $z_1, \dots, z_n$, navíc nemá singularity na $\langle 0,\infty)$ a je podílem dvou polynomů, kde stupeň jmenovatele je alespoň o dva větší než stupeň čitatele, platí:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\ln x\,dx &= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\Big(\sum_{z_j}\operatorname{Res}_{z_j} f(z)\ln^2 z\Big)\,,\\ \int_0^\infty f(x)\,dx &= -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\Big(\sum_{z_j}\operatorname{Res}_{z_j} f(z)\ln^2 z\Big)\,,\end{aligned}$$

Přitom pro jednoznačnou větev komplexního logaritmu, kterou zd pouíváme, platí $\operatorname{Im}(\ln z) \in (0, 2\pi)$.
V našem případě $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ splňuje všechny výše uvedené předpoklady, a tedy:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\Big(\sum_{z=\pm i}\operatorname{Res}_z \frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}\Big)\,, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\Big(\sum_{z=\pm i}\operatorname{Res}_z \frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2}\Big).$$

V bodech $\pm i$ má f póly násobnosti 2, a tedy

$$\begin{aligned}R &:= \sum_{z=\pm i}\operatorname{Res}_z \frac{\ln^2 z}{(1+z^2)^2} = \sum_{z=\pm i}\left(\frac{(z\mp i)^2\ln^2 z}{(z-i)^2(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=\pm i} = \sum_{z=\pm i}\left(\frac{\ln^2 z}{(z\pm i)^2}\right)'\Bigg|_{z=\pm i} =\\ &= \sum_{z=\pm i}\frac{2\frac{1}{z}(z\pm i)^2\ln z - 2(z\pm i)\ln^2 z}{(z\pm i)^4}\Bigg|_{z=\pm i} = \sum_{\pm i}\frac{8(\pm i)\ln(\pm i) - 4(\pm i)\ln^2(\pm i)}{16}\,.\end{aligned}$$

Námi uvažovaná větev komplexního logaritmu dává $\ln i = i\frac{\pi}{2}$ a $\ln(-i) = i\frac{3\pi}{2}$, a tedy suma výše je

$$R = \frac{1}{4}\left(2i\cdot i\frac{\pi}{2} - i\Big(i\frac{\pi}{2}\Big)^2\right) + \frac{1}{4}\left(2(-i)\cdot i\frac{3\pi}{2} - (-i)\Big(i\frac{3\pi}{2}\Big)^2\right) = -\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi^2}{16} + \frac{3\pi}{4} - i\frac{9\pi^2}{16} = \frac{\pi}{2} - i\frac{\pi^2}{2}\,.$$

Pak tedy máme

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\Big(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi^2}{2}\Big) = -\frac{\pi}{4}\,,\\ \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= -\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\Big(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi^2}{2}\Big) = \frac{\pi}{4}\,,\end{aligned}$$

což jsme měli spočítat.

Poznámka: Sečtením obou integrálů lze dostat zajímavou rovnost

$$\int_0^\infty \frac{1+\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx = 0\,.$$

---

3. [10b] Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$\frac{1}{x^2 + x + 1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Do jakého z L^p prostorů patří tato funkce a jaký to má vliv na vlastnosti výsledné transformace? (Tj. lze-li některou z těchto vlastností využít, učiňte tak.)

Řešení: Uvažovaná funkce $f(x) := \frac{1}{x^2+x+1}$ patří jak do prostoru $L^1(\mathbb{R})$, tak do prostoru $L^2(\mathbb{R})$, a tedy $\widehat{f}$ bude spojitá, L^2-integrovatelná funkce.
Kořeny jmenovatele jsou $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a my máme

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x^2 + x + 1}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})} \frac{e^{-2\pi i z\xi}}{z^2 + z + 1} \tag{4}$$

podle reziduové věty, aplikované na integrál přes obvod „horního půlkruhu“. Ovšem pozor: podle Jordanova lemmatu půjde integrál přes „rozpínající se horní půlkružnici“ k nule jen tehdy, když bude v čitateli výraz e^{iax} pro $a > 0$. Je tedy vztah (4) použitelný pouze pro $\xi < 0$, a proto (pól v $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ je jednonásobný):

$$\xi < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{f}(\xi) = 2\pi i \frac{e^{-2\pi i(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\xi}}{2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i\xi} e^{\pi\xi\sqrt{3}}.$$

Pro $\xi > 0$ budeme integrovat přes obvod „dolního půlkruhu“. Nesmíme zapomenout, že tedy bereme do úvahy reziduum v $(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$ a dále že díky opačné orientaci křivky bude koeficient před reziduem „$-2\pi i$“:

$$\xi > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{f}(\xi) = -2\pi i \frac{e^{-2\pi i(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\xi}}{2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i\xi} e^{-\pi\xi\sqrt{3}}.$$

Oba částečné výsledky je možno zapsat jednotně pro pro $\xi \neq 0$:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{\pi i\xi} e^{-\pi|\xi|\sqrt{3}}.$$

Protože však víme, že $\widehat{f}$ je spojitá na celé reálné ose, platí výše uvedený vztah i pro $\xi = 0$. To nám m.j. („bez počítání“) dává hodnotu integrálu

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$
