Početní část zkoušky $\boxed{30.5.2006}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [8b] Rozviňte funkci $e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) do Fourierovy řady v Hermiteových polynomech. Ukažte ovšem nejprve, že zadaná funkce patří do prostoru, ve kterém je tento systém polynomů úplným ON systémem. K výpočtům můžete použít tabulku systémů ON polynomů, která byla rozdávaná na přednášce, všechny informace v ní uvedené považujte za známé.

---

2. [12b] Spočtěte integrály

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx\,, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

pomocí reziduové věty. Jde-li o některé z typů integrace, probíraných na přednášce, uveďte pouze postup, jakým se takové integrály počítají (tj. jaká funkce se integruje po jaké křivce, jaké musí mít tato funkce vlastnosti, aby jistá část integrálu šla k nule a jaký vzorec pro výpočet integrálu z toho vypadne). Pokud toto správně uvedete, nemusíte dokazovat, že ona jistá část integrálu jde k nule, pouze ověříte, že vaše funkce splňuje podmínky, které od ní požadujete.

---

3. [10b] Spočtěte Fourierovu transformaci funkce

$$\frac{1}{x^2+x+1}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Do jakého z L^p prostorů patří tato funkce a jaký to má vliv na vlastnosti výsledné transformace? (Tj. lze-li některou z těchto vlastností využít, učiňte tak.)

Teoretická část zkoušky | 30.5.2006

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	Σ

---

1. **[14b]**

   (a) Napište znění Liouvilleovy věty (o omezené holomorfní funkci) a dokažte ji.

   (b) Napište znění základní věty algebry a dokažte ji.

---

2. **[6b]**

   (a) Definujte pojem holomorfní funkce v bodě a na otevřené množině.

   (b) Napište znění věty o Cauchy-Riemannových podmínkách. Větu nemusíte dokazovat.

   (c) Je funkce $f(z) = z^3$ holomorfní v $\mathbb{C}$? Ověřte to pomocí Cauchy-Riemannových podmínek.
