Řešení početní části zkouškové písemky z 13.6.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [6b] Rozviňte funkci

$$f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$$

do Laurentovy řady o středu (-1) tak, aby tato řada konvergovala v bodě $z = -\frac{1}{2}$.

Řešení: V zadání je naznačeno, že chceme, aby Laurentova řada konvergovala na množině $0 < |z+1| < 1$, neboť ze všech možných (maximálních) mezikruží o středu (-1) jedině toto obsahuje bod $z = -\frac{1}{2}$. Dalším (standardním) krokem je úprava výrazu $f(z)$ pomocí rozkladu na parciální zlomky a tyto pak dále tak,[1] aby obsahovaly členy $(z+1)$:

$$f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z-2} - \frac{3}{z+1} = \frac{-1}{1-(z+1)} + \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{z+1}{3}} - \frac{3}{z+1}\,.$$

První zlomek je součtem geometrické řady s kvocientem $(z+1)$, která tedy konverguje pro $|z+1| < 1$, druhý zlomek je součtem geometrické řady s kvocientem $\frac{z+1}{3}$, která tedy konverguje pro $|z+1| < 3$:

$$\frac{-1}{1-(z+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\,, \qquad \text{resp.} \qquad \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{z+1}{3}} = \left(-\frac{2}{3}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n\,.$$

Třetí zlomek už je Laurentova řada na množině $0 < |z+1|$, celkově tedy pro $0 < |z+1| < 1$ máme:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n - \frac{3}{z+1} = -\frac{3}{z+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}+2}{3^{n+1}}(z+1)^n\,.$$

---

[1] Platí ovšem stejný footnote jako v předchozích písemkách. ☺

2. [12b] Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}, \qquad n = 2, 3, \dots .$$

Návod: Integrujte přes obvod kruhové výseče $\{0 \le \arg z \le \frac{2\pi}{n}, \ |z| \le R\}$. Pokud budete přesvědčeni, že integrál přes nějakou část integračního oboru má jít k nule, odůvodněte to přesně. Výsledek ověřte nezávislým výpočtem pro $n = 2$.

Řešení:

Integrační křivka je tedy $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 - \varphi_3$, kde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t, & t &\in (0, R), \\ \varphi_2(t) &= Re^{it}, & t &\in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right), \\ \varphi_3(t) &= te^{i\frac{2\pi}{n}}, & t &\in (0, R). \end{aligned}$$

Integrovaná funkce je holomorfní v celé komplexní rovině s výjimkou n kořenů rovnice $z^n = -1$, z nichž však v uvažované kruhové výseči leží pouze kořen $z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}$. Podle reziduové věty tedy platí

$$\int_{\varphi_1} \frac{dz}{1+z^n} + \int_{\varphi_2} \frac{dz}{1+z^n} - \int_{\varphi_3} \frac{dz}{1+z^n} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{n}}} \frac{1}{1+z^n}. \tag{1}$$

Ukážeme, že integrál přes křivku φ_2 jde k nule, pokud $R \to +\infty$:

$$\left| \int_{\varphi_2} \frac{dz}{1+z^n} \right| \le \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left| \frac{Rie^{it}}{1+R^n e^{int}} \right| dt = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{|1+R^n e^{int}|}\, dt.$$

Pro pevné $n > 1$ a $R \to +\infty$ jde integrand k nule. Zároveň je $\left|1 + R^n e^{int}\right| \ge R^n - 1$ (nakreslete si obrázek!), tedy je

$$\frac{R}{|1+R^n e^{int}|} \le \frac{R}{R^n - 1} \le c \qquad \text{pro } R \ge R_0,$$

protože uvedený výraz má pro pevné $n > 1$ a $R \to +\infty$ nulovou limitu.[2] Tato konstanta je na intervalu integrace $\langle 0, \frac{2\pi}{n} \rangle$ integrabilní majorantou pro limitní přechod za integračním znamením, tedy celkově vidíme, že integrál přes křivku φ_2 půjde k nule pro $R \to +\infty$.

Dále už je výpočet standardní. V (1) vyčíslíme integrály přes φ_1 a φ_3, ve kterých pošleme $R \to +\infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_1} \frac{dz}{1+z^n} = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^n}, \tag{2}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_3} \frac{dz}{1+z^n} = \int_0^\infty \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}}{1+t^n e^{2\pi i}}\, dt = e^{i\frac{2\pi}{n}} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^n}. \tag{3}$$

Zbývá spočíst reziduum v (1). Jde o jednonásobný kořen, takže jej dosadíme do derivace jmenovatele. Všimněte si, že poté rozšířením zlomku znovu číslem $z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}$ budeme moci využít ve jmenovateli vlastnosti $z_0^n = -1$:

$$\operatorname{Res}_{z=e^{i\frac{\pi}{n}}} \frac{1}{1+z^n} = \left.\frac{1}{nz^{n-1}}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{n}}} = \left.\frac{z}{nz^n}\right|_{z=e^{i\frac{\pi}{n}}} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}. \tag{4}$$

Dosazením (2), (3), (4) do (1) dostaneme

$$\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^n} = -2\pi i \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

Vydělíme-li tuto rovnost výrazem $2i\, e^{i\frac{\pi}{n}}$, dostaneme vlevo před integrálem hodnotu $(-\sin\frac{\pi}{n})$, tedy celkově

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}, \qquad n = 2, 3, \dots .$$

Přímým výpočtem pro $n = 2$ dostaneme pro kontrolu $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{arctg} x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$, což souhlasí.

[2] Neříkám, že toto je jediné možné odůvodnění, proč integrál jde k nule. Kdo umí modifikované Jordanovo lemma, může argumentovat jím. Ale pokud se dáte na cestu „limitní přechod za integračním znamením“, nějakým způsobem musíte udůvodnit, že máte integrabilní majorantu.

3. [12b] Buď funkce f definována jako $\cos\frac{x}{2}$ na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ a všude jinde na reálné ose nechť je funkce f nulová. Spočtěte $\widehat{f \star f}$, tj. Fourierovu transformaci konvoluce funkce f se sebou samou.
Návod: Použijte nejprve vzorec pro Fourierovu transformaci konvoluce. Odůvodněte jeho použití!

Řešení: Je-li $f \in L^1(\mathbb{R})$, platí $\widehat{f \star f} = \widehat{f} \cdot \widehat{f}$. Naše funkce je spojitá a nulová vně intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, je tedy jistě prvkem prostoru $L^1(\mathbb{R})$, proto lze uvedený vzorec použít. Stačí tedy spočítat Fourierovu transformaci a tu pak umocnit na druhou:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x\xi}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i x\xi} \cos\frac{x}{2}\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2\pi i x\xi} \cdot \frac{e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}}{2}\, dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(\frac{i}{2} - 2\pi i\xi)}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x(-\frac{i}{2} - 2\pi i\xi)}\, dx\,, \end{aligned} \tag{5}$$

pokud použijeme vyjádření kosinu pomocí komplexní exponenciály. Oba integrály v (5) lze spočítat přímo, protože integrované funkce mají triviální primitivní funkci, ovšem následující výpočet platí pouze pro $\xi \neq \pm\frac{1}{4\pi}$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{i - 4\pi i\xi}\left(e^{\pi(\frac{i}{2} - 2\pi i\xi)} - e^{-\pi(\frac{i}{2} - 2\pi i\xi)}\right) + \frac{1}{-i - 4\pi i\xi}\left(e^{\pi(-\frac{i}{2} - 2\pi i\xi)} - e^{-\pi(-\frac{i}{2} - 2\pi i\xi)}\right) = \\ &= \frac{1}{i - 4\pi i\xi}\left(ie^{-2\pi^2 i\xi)} + ie^{2\pi^2 i\xi)}\right) + \frac{1}{-i - 4\pi i\xi}\left(-ie^{-2\pi^2 i\xi)} - ie^{2\pi^2 i\xi)}\right) = \\ &= \frac{2\cos 2\pi^2\xi}{1 - 4\pi\xi} + \frac{2\cos 2\pi^2\xi}{1 + 4\pi\xi} = \frac{4\cos 2\pi^2\xi}{1 - 16\pi^2\xi^2}\,, \qquad \xi \neq \pm\frac{1}{4\pi}\,. \end{aligned}$$

Fourierova transformace funkce z $L^1(\mathbb{R})$ však musí být spojitá, proto musí existovat vlastní limita výrazu $\frac{4\cos 2\pi^2\xi}{1-16\pi^2\xi^2}$ v bodech $\xi = \pm\frac{1}{4\pi}$. Ze sudosti f a tedy i $\widehat{f}$ stačí napočítat limitu jen v jednom z těchto bodů (malá vzpomínka na blahé doby prvního semestru), případně použít přímo vztah (5) pro $\xi = \pm\frac{1}{4\pi}$, jak se vám chce. V každém případě vyjde π. Celkově pak tedy

$$\left(\widehat{f \star f}\right)(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{f}(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{4\cos 2\pi^2\xi}{1-16\pi^2\xi^2}\right)^2, & \xi \neq \pm\frac{1}{4\pi}\,, \\ \pi^2\,, & \xi = \pm\frac{1}{4\pi}\,. \end{cases}$$