Početní část zkoušky $\boxed{13.6.2006}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [6b] Rozviňte funkci
$$f(z) = \frac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$$
do Laurentovy řady o středu (-1) tak, aby tato řada konvergovala v bodě $z = -\frac{1}{2}$.

---

2. [12b] Spočtěte integrál
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}, \qquad n = 2, 3, \dots .$$
Návod: Integrujte přes obvod kruhové výseče $\{0 \le \arg z \le \frac{2\pi}{n},\ |z| \le R\}$. Pokud budete přesvědčeni, že integrál přes nějakou část integračního oboru má jít k nule, odůvodněte to přesně. Výsledek ověřte nezávislým výpočtem pro $n = 2$.

---

3. [12b] Buď funkce f definována jako $\cos\frac{x}{2}$ na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a všude jinde na reálné ose nechť je funkce f nulová. Spočtěte $\widehat{f \star f}$, tj. Fourierovu transformaci konvoluce funkce f se sebou samou.

Návod: Použijte nejprve vzorec pro Fourierovu transformaci konvoluce. Odůvodněte jeho použití!

Teoretická část zkoušky | 13.6.2006 |

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	Σ

---

1. **[14b]**

   (a) Definujte pojem rezidua komplexní funkce komplexní proměnné v bodě $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

   (b) Formulujte čtyři pravidla o výpočtu reziduí v konečném komplexním bodě, tj. v bodě $z \in \mathbb{C}$.

   (c) Tato čtyři pravidla dokažte.

---

2. **[6b]**

   (a) Definujte, co je to (obecný) Hilbertův prostor.

   (b) Definujte, co je to Hilbertův prostor L^2 integrovatelných funkcí s vahou ϱ. Nezapomeňte definovat i váhu ϱ.

   (c) Zformulujte alespoň jednu větu o tom, že řešení okrajových úloh pro obyčejnou diferenciální rovnici generují úplné OG systémy. Větu nemusíte dokazovat.

   (d) Buď $H := L^2_{x^2}(0,1)$ Hilbertův prostor L^2 integrovatelných funkcí s vahou x^2 na intervalu $(0,1)$. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ patří funkce x^α do H?

   Své odpovědi odůvodněte.
