Řešení početní části zkouškové písemky z 20.6.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [6b] Ukažte, že Hermiteovy polynomy splňují vztah

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

a že řeší (Hermiteovu) rovnici

$$\left(e^{-x^2} H_n'(x)\right)' = -2ne^{-x^2} H_n(x)\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

V obou případech považujte za známou definici Hermiteových polynomů

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

a také rekuretní formuli pro ně.

Řešení:

a) Z definice Hermiteových polynomů plyne

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= \left((-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\right)' = (-1)^n 2xe^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) + (-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) = \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) = 2nH_{n-1}(x)\,. \end{aligned}$$

Poslední rovnost využívá rekurentního vztahu pro Hermiteovy polynomy, tj. vztahu

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\,. \tag{1}$$

b) Spočteme (i s využitím znalosti derivace z předchozího bodu)

$$\begin{aligned} \left(e^{-x^2} H_n'(x)\right)' &+ 2ne^{-x^2} H_n(x) = \\ &= \left((-1)^n 2x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) + (-1)^n \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2})\right)' + 2ne^{-x^2} H_n(x) = \\ &= (-1)^n 2 \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) + (-1)^n 2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(e^{-x^2}) + (-1)^n \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}(e^{-x^2}) + \\ &\qquad + 2ne^{-x^2} H_n(x) = \\ &= (2n+2)e^{-x^2} H_n(x) - 2xe^{-x^2} H_{n+1}(x) + e^{-x^2} H_{n+2}(x) = \\ &= e^{-x^2} \Big(\underbrace{2(n+1)H_n(x) - 2xH_{n+1}(x) + H_{n+2}(x)}_{=0 \text{ díky (1), kde uvažujeme } (n+1) \text{ místo } n.} \Big) = 0\,. \end{aligned}$$

---

2. [10b] Spočtěte integrál (ve smyslu hlavní hodnoty)

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x-\pi)}\, dx\,.$$

Nezapomeňte říci, jak je integrál ve smyslu hlavní hodnoty definován. Nezapomeňte také zdůvodnit průběh celého výpočtu.

Řešení:
Jde o standardní typ integrace, integrál budeme počítat jako imaginární čast integrálu

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x-\pi)}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{(-\infty,\infty)\setminus\mathcal{U}^{\varepsilon}(\pi)} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x-\pi)}\, dx\,.$$

Protože integrovaná funkce má singularitu na reálné ose (a to pól násobnosti 1, tj. „správnou“ singularitu), musí se integrál počítat ve smyslu hlavní hodnoty (definice je obsažena v rovnosti výše).[1] Integrujeme funkci $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-\pi)}$ přes křivku v komplexní rovině, sestávající ze čtyř částí: úsečky na reálné ose od bodu $-R$ do $\pi-\varepsilon$, z oblouku půlkružnice o středu π a poloměru ε (který leží v horní polorovině a je obíhaný po směru hodinových ručiček), úsečky na reálné ose od bodu $\pi+\varepsilon$ do R, a konečně z oblouku půlkružnice o středu 0 a poloměru R (který leží v horní polorovině a je obíhaný proti směru hodinových ručiček). Protože jsou všechny singularity na reálné ose maximálně póly řádu 1 (což v našem případě je), a protože je integrovaná funkce tvaru $\frac{e^{aiz}P(z)}{Q(z)}$, kde $a>0$ a P a Q jsou polynomy, stupeň $Q >$ stupeň P (to vše je potřeba pro Jordanovo lemma a to vše je v našem případě splněno), máme:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x-\pi)}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-\pi)} + \pi i \operatorname{Res}_\pi \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-\pi)} =: R\,.$$

Obě rezidua jsou v pólech 1. řádu, a tedy reziduum spočteme dosazením do holomorfní části funkce a do derivace příslušného členu ve jmenovateli:

$$\operatorname{Res}_i \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-\pi)} = \frac{e^{-1}}{2i(i-\pi)}\,, \qquad \operatorname{Res}_\pi \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-\pi)} = \frac{e^{i\pi}}{\pi^2+1}\,,$$

takže

$$R = \frac{\pi}{e(i-\pi)} + \frac{\pi i e^{i\pi}}{\pi^2+1} = -\frac{\pi(i+\pi)}{e(\pi^2+1)} + \frac{\pi(i\cos\pi - \sin\pi)}{\pi^2+1}\,.$$

Z tohoto čísla stačí vzít imaginární část a dostat (proč před tím naším integrálem nakonec nepíšu v.p., zatímco před integrálem s komplexní exponencielou ano? - viz poznámku pod čarou)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x-\pi)}\, dx &= \operatorname{Im}\left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x-\pi)}\, dx\right) = \\
&= \frac{-\pi}{e(\pi^2+1)} + \frac{\pi(-1)}{\pi^2+1} = \\
&= -\frac{\pi}{\pi^2+1}\left(\frac{1}{e}+1\right).
\end{aligned}$$

---

[1] Je dobré si všimnout, že reálná funkce, kterou integrujeme, vlastně žádný pól v bodě π nemá - existuje tam vlastní její limita, neboť sinus má v bodě π přesně jednonásobný kořen. Nemuselo by tedy v zadání ani ve výsledku ono v.p. před integrálem být. Tím, že však integrál počítáme komplexně, vneseme tam pomocí e^{ix} také funkci kosinus, která už kořen v π nemá, tedy je nutno výpočet provádět skutečně ve smyslu v.p.

3. [14b] Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^{2x}+1}\, dx\,, \qquad 0 < a < 2\,.$$

Návod: integrujte přes obvod obdélníka o vrcholech $-R$, R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$, a poté pošlete $R \to \infty$. Zdůvodněte alespoň „slovně“, které dva integrály půjdou k nule. Za zcela přesné odůvodnění budou bonusové body.

Řešení: Integrační křivka je tedy $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{-} \varphi_3 \dot{-} \varphi_4$, kde

$$\varphi_1(t) = t\,, \quad t \in (-R,R)\,, \qquad \varphi_2(t) = R + it\,, \quad t \in (0, 2\pi)\,,$$
$$\varphi_3(t) = t + 2\pi i\,, \quad t \in (-R,R)\,, \qquad \varphi_4(t) = -R + it\,, \quad t \in (0, 2\pi)\,.$$

Funkce $f(z) = \frac{e^{az}}{e^{2z}+1}$ má singularity přesně v těch bodech, ve kterých je $e^{2z} = -1$, tj. $2z = \pi i + 2k\pi i$, neboli $z = \frac{\pi i}{2} + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvnitř obdélníka, jehož obvod jsme právě popsali, leží však jen dva z těchto bodů a sice $\frac{\pi i}{2}$ a $\frac{3\pi i}{2}$. Podle reziduové věty, aplikované na tento obdélník, platí tedy (integrál I_j odpovídá integrálu přes křivku φ_j):

$$\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{at}\, dt}{e^{2t}+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{i\, e^{a(R+it)}\, dt}{e^{2R+2it}+1}}_{I_2} - \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{a(t+2\pi i)}\, dt}{e^{2t}+1}}_{I_3} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{i\, e^{a(-R+it)}\, dt}{e^{-2R+2it}+1}}_{I_4} = 2\pi i \sum_{z\in\{\frac{\pi i}{2}, \frac{3\pi i}{2}\}} \operatorname{Res}_z \frac{e^{az}}{e^{2z}+1}\,.$$

Později ukážeme, že $I_2 \to 0$, $I_4 \to 0$, pokud $R \to +\infty$ a $0 < a < 2$. Z integrálu I_3 lze vytknout $-e^{2\pi a i}$, čímž dostaneme I_1. Po limitním přechodu $R \to +\infty$ tedy dostaneme

$$\left(1 - e^{2\pi a i}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{e^{2t}+1}\, dt = 2\pi i \sum_{z\in\{\frac{\pi i}{2}, \frac{3\pi i}{2}\}} \operatorname{Res}_z \frac{e^{az}}{e^{2z}+1} = 2\pi i \left(\frac{e^{\frac{\pi i a}{2}}}{2e^{\pi i}} + \frac{e^{\frac{3\pi i a}{2}}}{2e^{3\pi i}} \right) = -\pi i \left(e^{\frac{\pi i a}{2}} + e^{\frac{3\pi i a}{2}} \right)\,.$$

Pozor, pro $a = 1$ jsou obě strany této rovnosti rovny nule, pro tuto hodnotu budeme tedy muset vypočítat náš integrál jinak. Nejprve však $a \neq 1$, kdy tedy máme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{at}}{e^{2t}+1}\, dt = -\pi i \frac{e^{\pi i a}\left(e^{-\frac{\pi i a}{2}} + e^{\frac{\pi i a}{2}}\right)}{e^{\pi i a}\left(e^{-\pi a i} - e^{\pi a i}\right)} = -\pi i \frac{2\cos\frac{\pi a}{2}}{-2i \sin \pi a} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi a}{2}}\,. \tag{2}$$

Pro $a = 1$ lze však zadaný integrál spočíst přímo, substitucí $e^x = y$, $e^x\, dx = dy$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+1} = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2+1} = \Big[\operatorname{arctg} y\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}\,,$$

a tedy (2) je konečný výsledek pro všechna $0 < a < 2$.

Zbývá ukázat, že $I_2 \to 0$, $I_4 \to 0$, pokud $R \to +\infty$ a $0 < a < 2$. Integrandy obou integrálů lze odhadnout takto:

- I_2 : $$\left| \frac{i\, e^{a(R+it)}}{e^{2R+2it}+1} \right| = \frac{e^{aR}}{|e^{2R}e^{2it}+1|} \approx e^{R(a-2)} \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty \text{, pokud } a < 2.$$
- I_4 : $$\left| \frac{i\, e^{a(-R+it)}}{e^{-2R+2it}+1} \right| = \frac{e^{-aR}}{|e^{-2R}e^{2it}+1|} \approx e^{-aR} \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty \text{, pokud } a > 0.$$

Všimněte si několika věcí: za prvé se ukazuje, proč bylo zadáno $0 < a < 2$. Za druhé si všimněte, že zatímco ve jmenovateli prvního integrandu jde člen e^{2R} k nekonečnu, a tedy jmenovatel se pro velká R „chová jako“ e^{2R}, ve jmenovateli druhého integrandu jde člen e^{-2R} k nule, a tedy jmenovatel se pro velká R „chová jako“ 1, nikoli „jako e^{-2R}“. Jednou z chyb bylo, že někteří řešitelé mechanicky odhadovali druhý integrand výrazem typu e^{-aR-2R}.

Přesnější („matematické“) odůvodnění by mohlo vypadat například takto: v případě I_2 máme

$$\frac{e^{aR}}{|e^{2R}e^{2it}+1|} \leq \frac{e^{aR}}{e^{2R}-1} = \frac{e^{(a-2)R}}{1-e^{-2R}} \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty \text{ pokud } a < 2,$$

všimněte si, jak je udělaná ta nerovnost: zvětšujeme zlomek, tj. vezmeme nejmenší možný jmenovatel. V případě I_4 jde jmenovatel v absolutní hodnotě k jedné, tedy je v jisté chvíli (pro $R > R_0$) určitě větší než např. $\frac{1}{2}$, proto $\frac{e^{-aR}}{|e^{-2R}e^{2it}+1|} \leq 2e^{-aR} \to 0 \quad$ pro $R \to \infty$ pokud $a > 0$.