Početní část zkoušky

| 20.6.2006 |
|---|

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

| 1. | 2. | 3. | Σ |
|---|---|---|---|
| | | | |

*Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.*

---

1. [6b] Ukažte, že Hermiteovy polynomy splňují vztah

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

a že řeší (Hermiteovu) rovnici

$$\left(e^{-x^2} H_n'(x)\right)' = -2ne^{-x^2} H_n(x)\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

V obou případech považujte za známou definici Hermiteových polynomů

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

a také rekuretní formuli pro ně.

---

2. [10b] Spočtěte integrál (ve smyslu hlavní hodnoty)

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2+1)(x-\pi)}\, dx\,.$$

Nezapomeňte říci, jak je integrál ve smyslu hlavní hodnoty definován. Nezapomeňte také zdůvodnit průběh celého výpočtu.

---

3. [14b] Spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^{2x}+1}\, dx\,, \qquad 0 < a < 2\,.$$

*Návod:* integrujte přes obvod obdélníka o vrcholech $-R$, $R$, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$, a poté pošlete $R \to \infty$. Zdůvodněte alespoň „slovně“, které dva integrály půjdou k nule. Za zcela přesné odůvodnění budou bonusové body.

---

Teoretická část zkoušky $\boxed{20.6.2006}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

| 1. | 2. | Σ |
|---|---|---|
| | | |

---

1. **[12b]**

   (a) Definujte, co je to izolovaná singularita. Definujte (pomocí limity), co je to pól. Definujte, co je to pól násobnosti $n$.

   (b) Dokažte, že každý pól má nějakou násobnost.

   (c) Je v bodě 0 pól funkce $\frac{\sin z^2}{z^4(z^2+1)}$? Jakou má násobnost?

---

2. **[8b]**

   (a) Zformulujte Weierstrassovu větu o řadě holomorfních funkcí.

   (b) Dokažte tuto větu.

---