# Řešení početní části zkouškové písemky z 27.6.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [6b]

a) Rozviňte funkci
$$z^2 \sin \frac{1}{z-1}$$
do Laurentovy řady v okolí bodu 1.

b) Určete typ singularity v bodě $z = 1$ a reziduum v tomto bodě.

c) Jakou hodnotu má koeficient $a_{-3}$ u členu $\frac{1}{(z-1)^3}$?

---

**Řešení:**

a) Ze znalosti známé Taylorovy řady pro sinus ($\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$) odvozujeme, že pro všechna $x = \frac{1}{z-1}$, tedy pro $z \neq 1$, platí
$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!\,(z-1)^3} + \frac{1}{5!\,(z-1)^5} \mp \cdots . \tag{1}$$
Zbývá jen faktor $z^2$ převést do „řady“ o středu jedna:
$$z^2 = (z-1+1)^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1 \tag{2}$$
a obě řady (1), (2) vynásobit. Násobíme tedy řadu (1) postupně třemi faktory z (2) a vzniklé tři řady sečteme. Jediné omezení je $z \neq 1$, tedy pro $0 < |z-1| < \infty$ platí:
$$\begin{aligned}
z^2 \sin \frac{1}{z-1} &= (z-1) - \frac{1}{3!(z-1)} + \frac{1}{5!\,(1-z)^3} \mp \cdots + \\
&+ 2 - \frac{2}{3!(z-1)^2} + \frac{2}{5!\,(1-z)^4} \mp \cdots + \\
&+ \frac{1}{1-z} - \frac{1}{3!\,(1-z)^3} + \frac{1}{5!\,(1-z)^5} \mp \cdots = \\
&= (z-1) + 2 + \left(1 - \frac{1}{3!}\right) \frac{1}{(z-1)} - \frac{2}{3!(z-1)^2} - \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}\right) \frac{1}{(z-1)^3} \cdots .
\end{aligned}$$
Vzorec pro obecný koeficient $a_n$ můžou zájemci najít v Kopáčkovi (Příklady č. 4), neboť z těchto skript příklad pochází.

b) Z řady, kterou jsem obdrželi v bodu a) plyne, že v $z = 1$ je podstatná singularita dané funkce. Reziduum si přečteme jako koeficient u členu $\frac{1}{z-1}$, tedy $\mathrm{Res}_1\, z^2 \sin \frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$.

c) Z bodu a) plyne, že koeficient u členu $\frac{1}{(z-1)^3}$ v uvedené řadě má hodnotu $\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!} = -\frac{19}{120}$.

---

---

2. [10b] Nalezněte Fourierovu transformaci funkce

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}\,, \quad a > 0\,.$$

Nezapomeňte zdůvodnit průběh celého výpočtu.

---

**Řešení:**
Funkce $\frac{x}{x^2+a^2}$ <u>není</u> prvkem prostoru $L^1(\mathbb{R})$, je však prvkem prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Odtud plyne jednak, že její Fourierova transformace musí být počítána jako hlavní hodnota integrálu, tj. jako

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{-2\pi i x\xi}}{x^2 + a^2}\, dx\,, \tag{3}$$

jednak, že výsledná transformace $\widehat{f}(\xi)$ nemusí být spojitá, bude však prvkem prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Dále je dobré si všimnout, že $f$ je lichá, a tedy i její Fourierova transformace bude.
Integrál v (3) spočteme pomocí reziduové věty:

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{xe^{-2\pi i x\xi}}{x^2 + a^2}\, dx \overset{\text{Pozor!}}{=} 2\pi i \operatorname{Res}_{ia} \frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{z^2 + a^2} = 2\pi i \left.\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{2z}\right|_{z=ia} = \pi i e^{2\pi a\xi}\,, \qquad \xi < 0\,. \tag{4}$$

Ono „Pozor!“ výše souvisí s omezením $\xi < 0$ a znamená toto: integrujeme přes obvod „horního půlkruhu“ a v uvedené chvíli používáme Jordanovo lemma na funkci $\frac{ze^{-2\pi i z\xi}}{z^2+a^2} =: \frac{P(z)e^{i\beta z}}{Q(z)}$. Aby příslušný integrál přes horní polokružnici šel k nule, musí být jednak stupeň čitatele $P$ menší než stupeň jmenovatele $Q$ (což je) a jednak v exponenciále tvaru $e^{i\beta z}$ musí být $\beta > 0$. Výpočet (4) tedy platí <u>pouze pro $\xi < 0$</u>.
Pro $\xi > 0$ můžeme buď obdobně jako v (4) počítat pomocí reziduové věty, ovšem tentokrát integrujeme přes obvod půlkruhu, ležícího v dolní polorovině - díky opačnému probíhání obvodu této křivky však nesmíme zapomenout násobit výsledek faktorem $(-1)$. Nebo můžeme využít znalosti o symetrii (lichost $\widehat{f}$) a dostat rovnou

$$\widehat{f}(\xi) = -\pi i e^{-2\pi a\xi}\,, \qquad \xi > 0\,. \tag{5}$$

Pro $\xi = 0$ dostaneme

$$\widehat{f}(0) = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2 + a^2}\, dx = 0\,, \tag{6}$$

neboť se integruje lichá funkce přes konečný interval symetrický kolem nuly.[1]
Celkově lze shrnout (4)–(6) pod společný zápis

$$\widehat{f}(\xi) = -\pi i \operatorname{sign}\xi\; e^{-2\pi a|\xi|}\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}\,. \tag{7}$$

---

[1] Případně též lze argumentovat tím, že $\widehat{f}$ musí být lichá a tedy nulová v nule.

3. [14b] Spočtěte integrál

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\,dx\,.$$

*Návod:* nejprve se pomocí per partes zbavte arkustangenty. U obdrženého standardního typu integrace nezapomeňte ověřit všechny předpoklady, za kterých se dá počítat pomocí reziduové věty. Specifikujte přes jakou křivku a jakou funkci integrujete.

**Řešení:** Provedeme doporučenou integraci per partes:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\,dx \stackrel{\text{p.p.}}{=} \underbrace{\left[\ln x\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \ln x\cdot\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(x^2+3)^2}}\cdot\frac{2x^2+6-4x^2}{(x^2+3)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{(2x^2-6)\,\ln x}{x^4+10x^2+9}\,dx\,,$$

to, že hraniční člen je nulový, je ovšem potřeba pořádně spočítat, nejsou to úplně samozřejmé limity. Budeme potřebovat všechny 4 kořeny jmenovatele: jde o bikvadratickou rovnici, tj. píšeme-li $y=x^2$, je $y_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{2}=-5\pm4$, tj. $y_1=-9$, $y_2=-1$ a ony 4 kořeny jmenovatele jsou odmocniny z těchto čísel, tedy $\pm3i$, $\pm i$. Dále můžeme pokračovat dvěma způsoby.

**Metoda I.** Integrál je tvaru $\int_0^\infty f(x)\,\ln x\,dx$, kde $f$ je **sudá** funkce, která nemá póly na reálné ose. Navíc je podílem dvou polynomů, přičemž stupeň jmenovatele je o dvě větší než stupeň čitatele. Tyto všechny tři podmínky jsou předpokladem pro výpočet založený na integrování funkce typu $f(z)\ln z$ přes křivku v komplexní rovině, sestávající ze čtyř částí: úsečky na reálné ose od bodu $-R$ do $-\varepsilon$, z oblouku půlkružnice o středu 0 a poloměru $\varepsilon$ (který leží v horní polorovině a je obíhaný po směru hodinových ručiček), úsečky na reálné ose od bodu $\varepsilon$ do $R$, a konečně z oblouku půlkružnice o středu 0 a poloměru $R$ (který leží v horní polorovině a je obíhaný proti směru hodinových ručiček). Pak víme (viz Kopáčkova skripta nebo poznámky z cvičení), že za uvedených předpokladů je

$$\int_0^\infty f(x)\,\ln x\,dx = \operatorname{Re}\Big(\pi i\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{Res} f(z)\ln z\Big) = -\pi\operatorname{Im}\Big(\sum_{\operatorname{Im} z>0}\operatorname{Res} f(z)\ln z\Big)\,. \tag{8}$$

Proto spočítáme rezidua v bodech $i$ a $3i$. Obecně je dobré si uvědomit, že všechny singularity jsou jednonásobnými kořeny jmenovatele, že je jich víc než jedna, a že tedy je dobré si nejprve udělat výpočet obecně: je-li $z_0$ jednonásobný kořen jmenovatele, máme

$$\operatorname{Res}_{z_0}\frac{\ln z(2z^2-6)}{z^4+10z^2+9} = \frac{2\ln z(z^2-3)}{4z^3+20z}\bigg|_{z=z_0} = \ln z_0\,\frac{z_0^2-3}{2z_0(z_0^2+5)}\,. \tag{9}$$

Počítáme rezidua v bodech $i$ a $3i$ podle vzorce (9), zároveň však podle vzorce (8) však bereme do úvahy jen jejich imaginární části:

$$\begin{aligned}
R_1 &:= \operatorname{Im}\Big(\operatorname{Res}_i f(z)\ln z\Big) = \operatorname{Im}\Big(\ln i\,\frac{i^2-3}{2i(i^2+5)}\Big) = \operatorname{Im}\Big(\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{-1-3}{2i(-1+5)}\Big) = 0\,,\\
R_2 &:= \operatorname{Im}\Big(\operatorname{Res}_{3i} f(z)\ln z\Big) = \operatorname{Im}\Big(\ln(3i)\,\frac{-9-3}{6i(-9+5)}\Big) = \operatorname{Im}\Big(\big(\ln 3+\frac{\pi i}{2}\big)\cdot\frac{-12}{6i\cdot(-4)}\Big) =\\
&= \operatorname{Im}\Big(\ln 3\cdot\frac{12i}{6\cdot(-4)}\Big) = -\frac{1}{2}\ln 3\,.
\end{aligned}$$

Celkově tedy podle (8):

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int_0^\infty \frac{(2x^2-6)\,\ln x}{x^4+10x^2+9}\,dx = -\pi\Big(0-\frac{1}{2}\ln 3\Big) = \frac{\pi}{2}\ln 3\,. \tag{10}$$

Na následující straně je uvedena ještě jedna metoda výpočtu tohoto integrálu.

**Metoda II.** Integrál je tvaru $\int_0^\infty f(x)\,\ln x\,dx$, kde $f$ je nemá póly na $\langle 0,\infty)$. Navíc je podílem dvou polynomů, přičemž stupeň jmenovatele je o dvě větší než stupeň čitatele. Tyto všechny podmínky jsou předpokladem pro to, že je možno použít i ono obecnější (tím pádem obecně složitější) integrování funkce typu $f(z)\ln^2 z$ po obvodu „téměř celého mezikruží“ o poloměrech $\varepsilon$ a $R$. Pak víme (viz Kopáčkova skripta nebo poznámky z přednášky), že za uvedených předpokladů je

$$\int_0^\infty f(x)\,\ln x\,dx = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(\sum_{z\in\mathbb{C}}\mathrm{Res}\, f(z)\ln^2 z\Big)\,. \tag{11}$$

Pozor, nezapomeňte, že bereme tu větev logaritmu, pro kterou je $\mathrm{Im}\,\ln z \in (0,2\pi)$.
Spočítáme tedy rezidua ve všech bodech $\pm i$ a $\pm 3i$, použijeme k tomu opět modifikaci postupu (9) (pozor! tentokrát se bere logaritmus na druhou!), zároveň si však můžeme uvědomit, že podle (11) budeme brát do úvahy pouze reálné části reziduí, což vyústí v nulový příspěvek od reziduí v bodech $\pm i$:

$$\begin{aligned} R_i &:= \mathrm{Re}\Big(\ln^2(i)\,\frac{-1-3}{2i(-1+5)}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\Big(\frac{\pi i}{2}\Big)^2\cdot\frac{-4}{8i}\Big) = 0\,,\\ R_{-i} &:= \mathrm{Re}\Big(\ln^2(-i)\,\frac{-1-3}{-2i(-1+5)}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\Big(\frac{3\pi i}{2}\Big)^2\cdot\frac{-4}{-8i}\Big) = 0\,,\end{aligned}$$

zatímco

$$\begin{aligned} R_{3i} &:= \mathrm{Re}\Big(\ln^2(3i)\,\frac{-9-3}{6i(-9+5)}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\Big(\ln 3+\frac{\pi i}{2}\Big)^2\cdot\frac{-12}{-24i}\Big) = \frac{\pi}{2}\ln 3\,,\\ R_{-3i} &:= \mathrm{Re}\Big(\ln^2(-3i)\,\frac{-9-3}{-6i(-9+5)}\Big) = \mathrm{Re}\Big(\Big(\ln 3+\frac{3\pi i}{2}\Big)^2\cdot\frac{-12}{24i}\Big) = -\frac{3\pi}{2}\ln 3\,.\end{aligned}$$

Celkově tedy podle (11):

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x}{x^2+3}\,dx = \int_0^\infty \frac{(2x^2-6)\,\ln x}{x^4+10x^2+9}\,dx = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2}\ln 3 - \frac{3\pi}{2}\ln 3\Big) = \frac{\pi}{2}\ln 3\,, \tag{12}$$

což je bohudík totéž jako (10). ☺