Početní část zkoušky $\boxed{27.6.2006}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [6b]

   a) Rozviňte funkci
   $$z^2 \sin \frac{1}{z-1}$$
   do Laurentovy řady v okolí bodu 1.

   b) Určete typ singularity v bodě $z = 1$ a reziduum v tomto bodě.

   c) Jakou hodnotu má koeficient a_{-3} u členu $\frac{1}{(z-1)^3}$?

---

2. [10b] Nalezněte Fourierovu transformaci funkce
   $$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}\,, \quad a > 0\,.$$
   Nezapomeňte zdůvodnit průběh celého výpočtu.

---

3. [14b] Spočtěte integrál
   $$\int_0^\infty \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+3}\,dx\,.$$
   Návod: nejprve se pomocí per partes zbavte arkustangenty. U obdrženého standardního typu integrace nezapomeňte ověřit všechny předpoklady, za kterých se dá počítat pomocí reziduové věty. Specifikujte přes jakou křivku a jakou funkci integrujete.

TEORETICKÁ ČÁST ZKOUŠKY $\boxed{27.6.2006}$

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	Σ

---

1. **[12b]**
   - (a) Definujte pojem komplexní primitivní funkce.
   - (b) Definujte pojem nezávislosti komplexního integrálu na cestě.
   - (c) Vyslovte větu o ekvivalencích výroku „míti primitivní funkci“ (celkem jde o ekvivalenci tří výroků).
   - (d) Dokažte tuto větu (tj. tolik implikací, aby bylo jasné, že všechny výroky jsou navzájem ekvivalentní).

---

2. **[8b]**
   - (a) Pro funkce $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujte konvoluci $f \star g$.
   - (b) Ukažte, že pak $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
   - (c) Ukažte, že $f \star g = g \star f$.
