Početní část zkoušky $\boxed{16.1.2006}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	4.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [7b] Spočtěte

$$I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx\,, \qquad \alpha,\beta > 0\,.$$

---

2. [7b] Spočtěte plošný obsah té části plochy $z = \sqrt{x^2+y^2}$, která leží uvnitř tělesa $x^2+y^2 \le 4x-3$.

---

3. [8b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_1^2 \left(4yy' - \frac{8}{3}xy'^6\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1,2\rangle), y(1) = 1 - \sqrt[5]{16}, y(2) = 0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

---

4. [8b] Funkce f splňuje $f(x) = \sinh ax$ na $\langle 0,\pi\rangle$, $a > 0$.

   (a) Dodefinujte ji na celé $\mathbb{R}$ tak, aby ji bylo možno rozvinout do 2π-periodické Fourierovy řady, obsahující pouze siny.

   (b) Spočtěte tuto řadu. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

   (c) Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Teoretická část zkoušky | 16.1.2006

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	Σ

---

1. **[6b]**

   (a) Definujte potenciál vektorového pole $\vec{T}$ na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$, definujte křivkový integrál 1. a 2. druhu v $\mathbb{R}^3$.

   (b) Formulujte a dokažte vztah o výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu.

---

2. **[6b]**

   (a) Mějme Ω omezenou oblast v $\mathbb{R}^3$ s hladkou hranicí. Definujte pojem jednotkového vektoru vnější normály.

   (b) Uvažujte, že ve výše uvedené situaci máme funkce $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. Vyjádřete s využitím těchto hladkostí

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x = \dots$$

   (c) Nechť Ω je jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ se středem v počátku. Pro $u(x, y, z) = x^3 + xy^3$ vyjádřete derivaci u podle jednotkového vektoru vnější normály k Ω.

---

3. **[8b]**

   (a) Formulujte bez důkazu Riemann-Lebesgueovo lemma.

   (b) Formulujte a dokažte Riemannovu větu o lokalizaci.
