POČETNÍ ČÁST ZKOUŠKY 23.1.2006

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	4.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [8b] Spočtěte

$$F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\alpha\sin^2 x)}{\sin^2 x}\, dx\,, \qquad \alpha > -1\,.$$

---

2. [8b] Spočtěte (přímo nebo pomocí vhodné věty) křivkový integrál

$$\int_\gamma (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz\,,$$

kde $\langle\gamma\rangle$ je průnikem povrchu krychle $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle \times \langle 0, a\rangle$ s rovinou $x+y+z = \frac{3}{2}a$, $a > 0$. Přitom orientace křivky γ „vyhovuje pravidlu pravé ruky“ vzhledem k vektoru $(1, 1, 1)$.

---

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left(2xy + \frac{1+x^2}{2} y'^2\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0, 1\rangle), y(0) = 0, y(1) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

---

4. [8b] Mějme $f(x) = |\cos\frac{x}{2}|$ na $\mathbb{R}$.

   (a) Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

   (b) Dosazením $x = \pi$ sečtěte příslušnou číselnou řadu.

   (c) Napište Parsevalovu rovnost pro funkci f a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte příslušnou číselnou řadu.

TEORETICKÁ ČÁST ZKOUŠKY

23.1.2006

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	Σ

---

1. **[4b]**

   (a) Definujte plošné integrály obou druhů pro 2-plochu v $\mathbb{R}^3$.

   (b) Definujte vektorový součin $(n-1)$ vektorů v dimenzi n, definujte integrály obou druhů pro $(n-1)$-plochu v $\mathbb{R}^n$.

---

2. **[8b]**

   (a) Formulujte a dokažte Eulerovu-Lagrangeovu větu o E-L rovnici, bez důkazu lemmat, která k tomu potřebujete.

   (b) Formulujte a vysvětlete (bez důkazu) Jacobiho metodu hledání lokálního minima funkcionálu.

   (c) Předveďte tuto metodu na funkcionálu (z početní části písemky)

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left(2xy + \frac{1+x^2}{2} {y'}^2\right) dx\,,$$

   který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0)=0, y(1)=1\}$ a na jeho extremále $y_0(x) = x$.

---

3. **[8b]**

   (a) Formulujte bez důkazu větu o derivování Fourierových řad.

   (b) Formulujte a dokažte větu o integrování Fourierových řad.