Řešení početní části zkouškové písemky z 10.2.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Určete, pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ je konečný integrál

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}}\, dx$$

a spočtěte jej pro tyto hodnoty.

Řešení: Definiční obor funkce J určíme v průběhu výpočtu. Zderivujeme formálně podle proměnné a:

$$J'(a) = \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}}\, dx \; = \int_0^\infty e^{-(a+1)x^2}\, dx\,. \tag{1}$$

Vidíme, že integrál, který jsme obdrželi, je konečný pro $a > -1$. Pro tato a položíme $\sqrt{a+1}\, x = y$, tj. $\sqrt{a+1}\, dx = dy$, a dostaneme

$$J'(a) = \int_0^\infty e^{-y^2}\, \frac{dy}{\sqrt{a+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a+1}}\,. \tag{2}$$

Odůvodnění derivování: zderivovaná funkce má integrabilní majorantu

$$\left| e^{-(a+1)x^2} \right| \le e^{-(a_0+1)x^2} \in L(0,\infty) \quad \forall a \ge a_0 > -1\,,$$

derivovat tedy lze pro všechna taková a. Protože však $a_0 > -1$ může být libovolné pevné, je náš výpočet odůvodněn pro všechna $a > -1$. Samozřejmě ještě nesmíme zapomenout najít jedno pevné $a > -1$, pro které je konečný původní integrál $J(a)$. Je však $J(0) = 0$, a tedy i tato podmínka je splněna. Z (2) pak plyne, že

$$J(a) = \sqrt{\pi(a+1)} + c\,, \qquad a > -1\,.$$

Protože však $0 = J(0) = \sqrt{\pi} + c$, máme $c = -\sqrt{\pi}$, a tedy

$$J(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{a+1} - 1)\,, \qquad a > -1\,. \tag{3}$$

Kdo dopočetl až sem, dostal 6 bodů z 8.

Pro ty lepší (a všímavější) byla ještě neviditelně nastražena otázka, zda definiční obor funkce J nemůže být širší. Pro $a < -1$ je $J(a)$ nekonečné (exponenciela v čitateli převáží exponencielu ve jmenovateli a při integrování u nekonečna to vyústí v nekonečný integrál). Pro $a = -1$ však je integrál

$$J(-1) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{x^2}}{x^2 e^{x^2}}\, dx \; = \int_0^K \underbrace{\frac{1 - e^{x^2}}{x^2}}_{\text{vlastní limita u 0}} \cdot e^{-x^2}\, dx + \int_K^\infty \underbrace{\frac{1}{x^2} \cdot \left(e^{-x^2} - 1\right)}_{\text{integrabilní u } \infty}\, dx \tag{4}$$

konečný. Definiční obor funkce J je tedy $\{a \ge -1\}$. Když ukážeme, že $J(a)$ je spojitá v -1 zprava, tj. když najdeme integrabilní majorantu k funkci $\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}}$ pro $a \in (-1, -1+\varepsilon)$, bude bude vzorec (3) platný i pro $a = -1$. Rozpis (4) však napoví, jak takovou majorantu sestrojit: na intervalu $(0, K)$:

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| = \left| \underbrace{\frac{1 - e^{-ax^2}}{-ax^2}}_{\text{omezené díky vl. limitě}} \cdot (-a) e^{-x^2} \right| \le c \cdot \left| a e^{-x^2} \right| < c \cdot e^{-x^2}\,, \qquad \forall |a| < 1\,,$$

a na intervalu (K, ∞):

$$\left| \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| = \left| \frac{1}{x^2} \cdot \underbrace{\left(e^{-x^2} - e^{-(a+1)x^2}\right)}_{\text{omezené u nekonečna}} \right| \le \frac{1}{x^2} \cdot 2c\,, \qquad \forall a \ge -1\,.$$

Proto na závěr máme:

$$J(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{a+1} - 1)\,, \qquad a \ge -1\,. \tag{5}$$

---

2. [9b] Spočtěte povrch „čočky“, která vznikne jako průnik koule o středu $[0,0,1]$ a poloměru 1 s koulí o středu $[0,0,-1]$ a poloměru $\sqrt{5}$.

Řešení:
Příklad je trochu jednodušší variantou příkladu z minulé písemky (porovnejte). Povrch „čočky“ sestává ze dvou částí: horní, S_1, a spodní S_2. Obě části povrchu budeme parametrizovat explicitním předpisem, který bude definován na průmětu P_{xy} „čočky“ do roviny xy. Ze zadání úlohy plyne, že obě koule mají povrchy, charakterizované rovnicemi

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\,, \qquad \text{a} \qquad x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5\,.$$

Průnik těchto povrchů tedy splňuje obě rovnice současně. Jejich odečtením dostaneme

$$(z+1)^2 - (z-1)^2 = 4\,, \qquad \Rightarrow \qquad z = 1\,,$$

obě koule se tedy protínají ve výšce $z = 1$, která je rovna poloměru „horní“ koule. Odtud plyne, že „spodní“ část čočky, S_2, má povrch roven přesně polovině povrchu „horní“ koule, tj. $\frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 1^2 = 2\pi$. Průmět P_{xy} je kruh, jehož poloměr je tedy také 1, proto $P_{xy} = \{x^2 + y^2 \le 1\}$, a

$$S_1 \quad := \quad \int_{S_1} dS = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| dx\, dy\,, \tag{6}$$

kde φ je parametrizace plochy S_1, která je součástí „spodní“ koule:

$$\varphi : x = x,\ y = y,\ z = \sqrt{5 - x^2 - y^2} - 1\,.$$

Odtud přímým výpočtem dostaneme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \times \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad = \quad \left(\frac{x}{\sqrt{5-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{5-x^2-y^2}}, 1 \right)\,,$$

a tedy

$$S_1 = \iint_{x^2+y^2\le 1} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{5-x^2-y^2} + 1}\, dx\, dy = \sqrt{5} \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dx\, dy}{\sqrt{5-x^2-y^2}}\,.$$

Zavedením polárních souřadnic $x = \sqrt{5} r \cos\alpha$, $x = \sqrt{5} r \sin\alpha$ s Jakobiánem $5r$ se podmínka $x^2 + y^2 \le 1$ změní na $5r^2 \le 1$ a tudíž

$$S_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{5\sqrt{5} r}{\sqrt{5-5r^2}}\, dr\, d\alpha = 10\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{r\, dr}{\sqrt{1-r^2}} = 10\pi \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 10\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right)\,.$$

Celkový povrch „čočky“ je tedy roven

$$S = 2\pi + 10\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 12\pi - \frac{20\pi}{\sqrt{5}} = 4\pi(3 - \sqrt{5})\,.$$

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_1^3 5yy'^9 - 4xy'^{10}\, dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 1,3\rangle), y(1)=1, y(3)=0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Označíme-li $L(x,y,y') = 5yy'^9 - 4xy'^{10}$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 5y'^9$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = 45yy'^8 - 40xy'^9$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$(45yy'^8 - 40xy'^9)' = 5y'^9\,.$$

Po proderivování a úpravě dostaneme

$$360y''y'^7(y - xy') = 0\,.$$

Řešením této rovnice vyjde, že všechna řešení mají tvar $y = c_1x + c_2$ a z okrajových podmínek dostaneme jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice

$$y = \frac{3-x}{2}\,.$$

Toto řešení budeme dále značit $y_0(x)$.

Dodatečné úvahy za bonusové body:
Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x)$

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = \ldots = -\frac{135}{32} < 0 \qquad \text{v } \langle 1,3\rangle\,,$$

a protože nutnou podmínkou minima je $P(x) > 0$ v $\langle 1,3\rangle$, nemůže být nalezené řešení minimem daného funkcionálu. Může to však být třeba lokální maximum funkcionálu Φ, což vyšetříme jako minimum funkcionálu $(-\Phi)$. Změna znaménka u Φ a tedy i u L způsobí i změnu znaménka u P, nutná podmínka minima je tedy splněna. Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se pak redukuje na

$$\omega''(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 + c_2x\,.$$

Tato funkce má tu vlastnost (rozmyslete si), že pokud je identicky nenulová a přitom $\omega(1) = 0$, pak už $\omega(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (1,3\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 1,3\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x)$ lokálním minimem funkcionálu $(-\Phi)$ a tedy lokálním maximem funkcionálu Φ.

---

4. [7b] Mějme $f(x) = \cos 3x$ na $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\rangle$, $f(x) = 0$ na $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6}\rangle$ a $\langle \frac{\pi}{6}, \pi\rangle$ a dále periodicky s periodou 2π.

   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   2. Napište Parsevalovu rovnost a výpočtem určitého integrálu v ní sečtěte přislušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá, tedy:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x\, dx = \left[\frac{2}{3\pi}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3\pi}\,,$$

a dále

$$\pi a_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \cos nx\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos(3{+}n)x + \cos(3{-}n)x\big)\, dx\,.$$

Je vidět, že výpočet bude vypadat jinak pro $n = 3$ a jinak pro $n \neq 3$. Pro $n = 3$ máme

$$\pi a_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \big(\cos 6x + 1\big)\, dx = \frac{1}{6}\Big[\sin 6x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\,,$$

zatímco pro $n \neq 3$ je

$$\begin{aligned}
\pi a_n &= \frac{1}{3{+}n}\Big[\sin(3{+}n)x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3{-}n}\Big[\sin(3{-}n)x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \\
&= \frac{1}{3{+}n}\sin(3{+}n)\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3{-}n}\sin(3{-}n)\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3{+}n}\cos n\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3{-}n}\cos n\frac{\pi}{6} = \\
&= \frac{6}{\pi(9-n^2)}\cos n\frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{1}{3\pi} + \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1,n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{6}\cos nx}{9-n^2}\,,$$

a protože zadaná funkce je po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech „hrotech“, a navíc je spojitá na celém $\mathbb{R}$, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.
Parsevalova rovnost (v našem případě $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3x\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$) dává:

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{9\pi^2} + \frac{1}{36} + \frac{36}{\pi^2}\sum_{n=1,n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2}\,,$$

případně:

$$\sum_{n=1,n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2\frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2} = \frac{5\pi^2}{1296} - \frac{1}{162}\,.$$