Řešení početní části zkouškové písemky z 10.3.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [9b] Spočtěte integrál

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx\,.$$

Návod: spočtěte integrál

$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$$

nejprve pro $a \geq 0$, $a \neq 1$, a pak ukažte, že J je spojitá v bodě 1.

Řešení: Zderivujeme formálně podle proměnné a:

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}\,. \tag{1}$$

Odůvodnění derivování: zderivovaná funkce má integrabilní majorantu

$$\left|\frac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}\right| \leq 1 \in L(0, \pi/2) \quad \forall a \in \mathbb{R}\,,$$

derivovat tedy lze pro všechna $a \in \mathbb{R}$ a bude možno dosadit $a = 0$: $J(0) = 0$, což je tedy zároveň bod, ve kterém integrál J konverguje. Integrál v (1) spočteme substitucí $\operatorname{tg} x = y$:

$$\begin{aligned} J'(a) &= \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+a^2y^2}\, dy \overset{a \neq 1}{=} \frac{1}{1-a^2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{a^2}{1+a^2y^2} \right) dy \\ &= \frac{1}{1-a^2} \left(\Big[\operatorname{arctg} y\Big]_0^{\infty} - a \Big[\operatorname{arctg} ay\Big]_0^{\infty} \right) dy \overset{a \geq 0}{=} \frac{\pi}{2} \frac{1-a}{1-a^2} = \frac{\pi}{2(1+a)}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Tedy je

$$J(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + c\,, \qquad a \geq 0\,,\ a \neq 1\,.$$

Protože však $0 = J(0) + c$, máme

$$J(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a)\,, \qquad a \geq 0\,,\ a \neq 1\,. \tag{3}$$

Omezení na $a \neq 1$ plyne z toho, jak jsme počítali $J'(a)$. Platnost vzorce (3) i pro $a = 1$ bude plynout ze spojitosti[1] J v bodě $a = 1$. To se dá ukázat dvojím způsobem: buď si uvědomíme, že z (1) máme

$$J'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\,. \tag{4}$$

Protože tento integrál je konečný (ani jej nemusíme počítat, jde o omezenou funkci na omezeném intervalu), znamená to, že $J'(1)$ je vlastní, a tedy J je spojitá v bodě 1. Druhá možnost je nalézt integrabilní majorantu pro funkci $\frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$ pro $a \in \mathcal{U}^{\varepsilon}(1)$ - zopakujte si příslušnou větu. Přitom využijeme toho, že $|\operatorname{arctg} y| \leq |y|$:

$$\left|\frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\right| \leq \frac{|a \operatorname{tg} x|}{|\operatorname{tg} x|} \leq |a| \leq 1 + \varepsilon \in L(0, \pi/2) \quad \forall a \in \mathcal{U}^{\varepsilon}(1)\,.$$

Každopádně je možno použít vzorec (3) i pro $a = 1$ a dostat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln 2 \approx 1.088\,793\,046\ldots\,. \tag{5}$$

---

[1] Pozor, nikoli z toho, že $\frac{\pi}{2} \ln(1+a)$ je spojitá v bodě 1 (jak někteří z vás argumentovali), musí se ukázat, že funkce J, daná integrálem, je spojitá v bodě 1, pak se bude rovnat spojité funkci $\frac{\pi}{2} \ln(1+a)$ i v tomto bodě.

Řešení dalších dvou příkladů trochu odbudu, neboť:

---

2. [8b] Spočtěte integrál

$$\int_\gamma (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz\,,$$

kde křivka γ je elipsa $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$, $a>0$, $h>0$, orientovaná kladně vůči vektoru $\vec{v}=(h,0,a)$.

Řešení:
Jde o řešený příklad z Kopáčka: Příklady č. III, str. 138, Příklad C. Výsledek pro ty, které zajímá jenom výsledek: $-2\pi a(a+h)$.

---

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 5yy'^4 - 3xy'^5\,dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0)=3, y(1)=0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení:
Jde až na epsilon o příklad 3 z písemky 30.1.2006. Stačí v něm dosadit $n=5$ a dostanete příklad dnešní.

---

4. [7b] Mějme $f(x) = |x|$ na $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$, $f(x) = 0$ na $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6})$ a $(\frac{\pi}{6}, \pi\rangle$ a dále periodicky s periodou 2π.

   1. Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.

   2. Dosazením bodu $x = \frac{\pi}{6}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Funkce je sudá, tedy sinové koeficienty jsou nulové, a dále:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \, dx = \frac{\pi}{36} \,,$$

a dále

$$\pi a_n = 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos nx \, dx = \frac{6 \cos \frac{\pi n}{6} + n\pi \sin \frac{\pi n}{6} - 6}{3\pi \, n^2} \,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{\pi}{72} + \frac{1}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cos \frac{\pi n}{6} + n\pi \sin \frac{\pi n}{6} - 6}{n^2} \cos nx \,,$$

a protože zadaná funkce je po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí $F_f(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Proto v bodě $x = \frac{\pi}{6}$ je $F_f(x) = \frac{\pi}{12}$ a máme:

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{72} + \frac{1}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6 \cos \frac{\pi n}{6} + n\pi \sin \frac{\pi n}{6} - 6}{n^2} \cos \frac{\pi n}{6} \,,$$

což případně určitě půjde ještě aspoň trošku upravit :-).