Početní část zkoušky $\boxed{10.3.2006}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	4.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [9b] Spočtěte integrál
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx\,.$$
Návod: spočtěte integrál
$$J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\,(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$$
nejprve pro $a \geq 0$, $a \neq 1$, a pak ukažte, že J je spojitá v bodě 1.

---

2. [8b] Spočtěte integrál
$$\int_\gamma (y-z)\, dx + (z-x)\, dy + (x-y)\, dz\,,$$
kde křivka γ je elipsa $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$, $a>0$, $h>0$, orientovaná kladně vůči vektoru $\vec{v}=(h,0,a)$.

---

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu
$$\Phi(y) := \int_0^1 5yy'^4 - 3xy'^5\, dx\,,$$
který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0){=}3, y(1){=}0\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

---

4. [7b] Mějme $f(x)=|x|$ na $\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\rangle$, $f(x)=0$ na $\langle -\pi, -\frac{\pi}{6})$ a $(\frac{\pi}{6}, \pi\rangle$ a dále periodicky s periodou 2π.
   (a) Rozviňte tuto funkci do 2π-periodické Fourierovy řady. Určete, k jaké funkci konverguje výsledná řada a proč.
   (b) Dosazením bodu $x=\frac{\pi}{6}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

TEORETICKÁ ČÁST ZKOUŠKY

10.3.2006

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	Σ

---

1. [**6b**]

   (a) Definujte potenciál vektorového pole $\vec{T}$ na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$, definujte křivkový integrál 1. a 2. druhu v $\mathbb{R}^3$.

   (b) Formulujte a dokažte vztah o výpočtu křivkového integrálu pomocí potenciálu.

---

2. [**6b**]

   (a) Formulujte základní úlohu variačního počtu, tj. jak vypadá funkcionál, jaké jsou vlastnosti L a na jakém prostoru co hledám.

   (b) Formulujte Eulerovu-Lagrangeovu větu o E-L rovnici, bez důkazu.

   (c) Formulujte a vysvětlete (bez důkazu) Jacobiho metodu hledání lokálního minima funkcionálu.

---

3. [**8b**]

   (a) Formulujte Riemannovu větu o lokalizaci. Větu nemusíte dokazovat.

   (b) Formulujte větu o bodové konvergenci Fourierovy řady pro po částech $\mathcal{C}^1$ funkce. Ukažte, jak lze tuto větu dokázat, znáte-li Riemannovu větu o lokalizaci.
