Řešení početní části zkouškové písemky z 31.3.2006

MA pro F, 3. semestr

---

1. [8b] Pro $p > -1$, $q > -1$ spočtěte integrál

$$F(p,q) = \int_0^1 \sin(\ln x)\, \frac{x^p - x^q}{\ln x}\, dx\,.$$

Řešení: Pro pevné $q > -1$ zderivujeme podle proměnné p, nejprve formálně:[1]

$$\frac{\partial F}{\partial q}(p,q) = \int_0^1 x^p \sin \ln x \, dx\,. \tag{1}$$

Po substituci $\ln x = y$, tj. $x = e^y$, $dx = e^y\, dy$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p}(p,q) &= \int_{-\infty}^0 e^{py}\cdot \sin y \cdot e^y\, dy = \int_{-\infty}^0 e^{(p+1)y} \sin y\, dy = \\ &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^0 e^{(p+1+i)y}\, dy = \operatorname{Im} \frac{1}{p+1+i} = \frac{-1}{(p+1)^2+1}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Odůvodnění derivování: především je pro pevné $q > -1$ hodnota $F(q,q) = 0$ (tedy integrál konverguje pro jedno pevné $p = q$), a zderivovaná funkce má integrabilní majorantu (na intervalu $(-\infty, 0)$!)

$$\left| e^{(p+1)y} \sin y \right| \le e^{(p_0+1)y} \quad \forall p \ge p_0 > -1\,,$$

derivovat tedy lze pro všechna taková p. Protože však $p_0 > -1$ může být libovolné pevné, je náš výpočet odůvodněn pro všechna $p > -1$. Z (2) plyne, že

$$F(p,q) = -\operatorname{arctg}(p+1) + f(q)\,, \tag{3}$$

kde $f(q)$ je libovolná dostatečně hladká funkce. Protože však $F(q,q) = -\operatorname{arctg}(q+1) + f(q) = 0$ pro každé pevné $q > -1$, máme $f(q) = \operatorname{arctg}(q+1)$, a tedy

$$F(p,q) = \operatorname{arctg}(q+1) - \operatorname{arctg}(p+1)\,, \qquad p > -1\,,\ \ q > -1\,. \tag{4}$$

---

[1] Doufám, že jste ještě nezapomněli, že derivace x^p **podle** p není px^{p-1}, ale $x^p \ln x$.

2. [9b] Spočtěte (přímo nebo použitím některé z vhodných vět) plošný integrál

$$\int_S xyz\,dy\,dz + y^2 z\,dx\,dy$$

kde S je „vnějšek“ povrchu útvaru, určeného nerovnostmi $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, $z \leq \frac{x^2}{4} + y^2$, $z \geq 0$.

Řešení:
Samozřejmě můžete počítat uvedený plošný integrál přímo, uvědomte si však, že vás čekají tři integrály: přes eliptickou podstavu objektu, přes „svislé boky“ eliptického válce, a přes „horní parabolickou pokličku“ (udělejte si geometrickou představu). Lépe než tři plošné integrály je počítat jeden objemový, užijeme-li identity:

$$\int_S \vec{T}\,d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{T}\,dV\,.$$

Samozřejmě $\int_S \vec{T}\,d\vec{S} = \int_S T_1\,dy\,dz + T_2\,dz\,dx + T_3\,dx\,dy$. V našem případě je tedy $\vec{T} = (xyz, 0, y^2 z)$, a proto $\operatorname{div}\vec{T} = yz + y^2$, a

$$A := \int_S xyz\,dy\,dz + y^2 z\,dx\,dy = \int_V yz + y^2\,dV = \iint_{\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1}\left(\int_0^{\frac{x^2}{4}+y^2} yz + y^2\,dz\right)dx\,dy\,.$$

Poslední rovnost reflektuje výpočet objemového intergrálu pomocí Fubiniho věty: průmětem tělesa je eliptická podstava, a pro každý bod z této podstavy integrujeme podle z mezi 0 a $\frac{x^2}{4} + y^2$ (podívejte se do zadání na nerovnosti pro z). Tedy:

$$A := \iint_{\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1} \frac{y}{2}\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)^2 + y^2\left(\frac{x^2}{4} + y^2\right)dx\,dy\,.$$

Pro výpočet dvojného integrálu přes elipsu se hodí modifikované polární souřadnice $x = 2r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ s jakobiánem $2r$. Pak

$$A := \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\left(\frac{r\sin\varphi}{2}\cdot(r^2)^2 + r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\right)dr\,d\varphi = 0 + \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r^5\sin^2\varphi\,dr\,d\varphi\,,$$

neboť část integrálu je nulová díky členu $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi$. Celkově tedy

$$A = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{3}\,.$$

3. [6b] Najděte Euler-Lagrangeovu rovnici funkcionálu

$$\Phi(y) := \int_0^1 \left(2xy + \frac{1+x^2}{2} y'^2\right) dx\,,$$

který je definován na prostoru $X := \{y \in \mathcal{C}^1(\langle 0,1\rangle), y(0) = 0, y(1) = 1\}$. Najděte všechna řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na tomto prostoru. Uměli byste (za 2 bonusové body) rozhodnout, která z řešení E-L rovnice jsou lokálními minimy daného funkcionálu?

Řešení: Označíme-li $L(x,y,y') = 2xy + \frac{1+x^2}{2}y'^2$, máme $\frac{\partial L}{\partial y} = 2x$ a $\frac{\partial L}{\partial y'} = (1+x^2)y'$. Euler-Lagrangeova rovnice má obecně tvar

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y}\,,$$

tedy v našem případě

$$((1+x^2)y')' = 2x\,.$$

Proderivování vlevo by situaci podstatně zkomplikovalo, lépe je integrovat a obdržet postupně

$$\begin{aligned}(1+x^2)y' &= x^2 + c\,,\\ y' &= \frac{x^2+c}{1+x^2} = 1 + \frac{c-1}{1+x^2}\,,\\ y &= x + (c-1)\operatorname{arctg} x + d\,.\end{aligned}$$

Z podmínky $y(0) = 0$ ovšem plyne $d = 0$, načež z podmínky $y(1) = 1$ plyne $c = 1$. Dostaneme tak jediné řešení Euler-Lagrangeovy rovnice na prostoru X:

$$y = x\,.$$

Dodatečná úvaha za 2 bonusové body:
Zkusíme Jacobiho metodu zjišťování lokálních extrémů. Spočtěme pro $y_0(x) = x$:

$$P(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) = (1+x^2) > 0 \qquad \text{v } \langle 0,1\rangle\,.$$

Dále spočteme

$$Q(x) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0\,,$$

pomocná rovnice pro funkci ω se tedy redukuje na

$$(1+x^2)\omega'(x) = c_1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega(x) = c_1 \operatorname{arctg} x + c_2\,.$$

Podmínka $\omega(0) = 0$ říká, že $c_2 = 0$ a tedy $\omega(x) = c_1 \operatorname{arctg} x$. Má-li navíc ω nebýt identicky nulová, musí být $c_1 \neq 0$. Pak už ovšem ω nemá žádný nulový bod v $(0,1\rangle$. Protože navíc $y_0(x) \in \mathcal{C}^2(\langle 0,1\rangle)$ (nezapomínejte ani na tuto podmínku - podívejte se na příslušnou větu), je funkce $y_0(x) = x$ lokálním minimem funkcionálu Φ.

---

4. [7b] Funkce f splňuje: $f(x) = 0$ na $(-\pi, -\pi/2)$, $f(x) = x$ na $(0, \pi/2)$, navíc je sudá a 2π-periodická na $\mathbb{R}$. Rozviňte ji do Fourierovy řady, určete, jakým způsobem tato řada konverguje a k jaké funkci. Dosazením $x = \frac{\pi}{2}$ do Fourierovy řady sečtěte příslušnou číselnou řadu.

Řešení: Ze sudosti dostáváme

$$b_n = 0\,, \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{4}\,,$$

a dále

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \cdots = \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\,.$$

Fourierova řada má proto tvar

$$F_f(x) = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos nx\,,$$

a protože zadaná funkce (označme ji $\widetilde{f}$) je funkce po částech $\mathcal{C}^1$ s vlastními jednostrannými limitami hodnot funkce i derivací ve všech bodech nespojitosti, konverguje Fourierova řada bodově pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a platí

$$F_f(x) = \frac{\widetilde{f}(x+) + \widetilde{f}(x-)}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Při dosazení bodu $x = \frac{\pi}{2}$ do (5) tedy na pravé straně rovnosti dostaneme $\frac{\pi}{4}$, načež dostaneme

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2} + \pi n\sin\frac{\pi n}{2} - 2\right)\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Protože $\sin\frac{\pi n}{2}\cos\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{2}\sin\pi n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, máme odtud

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}}{n^2} = \frac{\pi^2}{16}\,,$$

což je jedna z možných forem výsledku. Je však možno si ještě uvědomit, že výraz $\cos^2\frac{\pi n}{2} - \cos\frac{\pi n}{2}$ je nenulový pouze pro $n = 4k+2$, a pak má hodnotu 2, tedy

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2}{(4k+2)^2} = \frac{\pi^2}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,,$$

což je jednodušší a přehlednější forma výsledku.