

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

1. [6b] Spočítejte Fourierovu transformaci funkce $f(x) = e^{-k|x|}$, $k > 0$, kde $x \in \mathbb{R}^3$.

2. [12b] Najděte radiální řešení $u(x, t) = v(r, t)$, $r = |x|$, rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad x \in K_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

(tzv. chladnutí třírozměrné koule), které splňuje

$$v\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0 \quad \text{pro } t > 0, \quad v(r, 0) = \frac{1}{2} - r \quad \text{pro } r \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

3. [12b] Pro $b > 0$ položme $\Omega := \mathbb{R} \times (0, b) \setminus G$, kde $G = (-\infty, 0) \times \{\frac{b}{2}\}$. Nechť funkce $g(x, 0) = g(x, b) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, a dále nechť $g(x, \frac{b}{2}-) = g(x, \frac{b}{2}+) = 1$ pro $x \leq 0$. Nechť konečně $u(x)$ je omezené řešení rovnice

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$u = g \quad \text{na hranici } \Omega.$$

Nalezněte hodnoty $u(x, \frac{b}{2})$ pro $x > 0$.

(Návod: začněte zobrazovat exponenciálou.)

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

SKUPINA (CVIČÍCÍ):

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	Σ

1. [12b]

- Zformulujte větu o distributivní derivaci funkce se skoky (hodnot a derivací) v bodě nula.
- Dokažte tuto větu pro případ druhé derivace, tj. $f''_{S'} = \dots$
- Zformulujte větu o nalezení fundamentálního řešení ODR a dokažte ji.

2. [8b]

- Definujte konvergenci posloupnosti distribucí $T_n \rightarrow T$ v prostoru \mathcal{S}' , definujte konvergenci řady distribucí $\sum_{n=1}^{\infty} T_n = T$ v prostoru \mathcal{S}' .
- Ukažte, že tzv. vzorkovací distribuce $\delta_{\Sigma} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ je distribuce, tj. že uvedená řada konverguje v prostoru \mathcal{S}' .
- Ukažte, že pokud $T_n \rightarrow T$ v prostoru \mathcal{S}' , tak i $\hat{T}_n \rightarrow \hat{T}$ v prostoru \mathcal{S}' . (Stříška označuje Fourierovu transformaci.)