Komentář k řešení početní části zkouškové písemky z 29.1.2007

MA pro F, 5. semestr

---

1. [7b] Spočtěte distribuci

$$T = |x|^2 \, \Delta\delta \, ,$$

kde $x \in \mathbb{R}^m$. (Pod termínem „spočtěte distribuci“ se rozumí „nalezněte její co nejjednodušší vyjádření“.)

Komentář k řešení: Jde o příklad 16 na straně 31 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Standardně „přehodíte“ násobení a derivování na testovací funkci, pozor na správné pořadí, někteří z vás je měli prohozené:

$$\big(|x|^2 \Delta\delta\big)\big(\varphi\big) = \Delta\delta\big(|x|^2\varphi\big) = \delta\big(\Delta(|x|^2\varphi)\big) \, ,$$

spočtete Laplaceův operátor

$$\Delta(|x|^2\varphi) = \ldots = |x|^2 \, \Delta\varphi + 4x \cdot \nabla\varphi + 2m\varphi$$

a dosadíte za x nulu (působení Diraca). Celkově tedy vyjde

$$|x|^2 \Delta\delta = 2m\delta \, .$$

---

2. [10b]

1. Řešte rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \delta(x) \otimes Y(t) \, , \qquad x \in \mathbb{R}^3 \, , \ t > 0 \, ,$$

   s počáteční podmínkou $u(x,0) = 0$. Zde $Y(t)$ je Heavisideova funkce.

2. Spočtěte limitu takto obdrženého řešení

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t)$$

   pro $x \neq 0$.

Komentář k řešení: Jde o příklad 19b na straně 263 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“ Příklad jsme počítali na přednášce, vzpomněli jste si? ☺ Jeho prvním zádrhelem je uvědomit si, jak interpretovat pravou stranu, která vznikne po dosazení do vzorce:

$$u = \Big(\delta(x) \otimes Y(y)\Big) \star \Big(G(x,t)Y(t)\Big) \, .$$

Vztah, který platí je tento:

$$\Big(\delta(x) \otimes Y(y)\Big) \star_{(x,t)} \Big(G(x,t)Y(t)\Big) = Y(t) \star_{(t)} \Big(G(x,t)Y(t)\Big) \, ,$$

neboli „Dirac po prostoru se prokonvoluuje a zůstane pouze časová konvoluce“.[1]
Tedy

$$u = Y(t) \star_{(t)} \Big(G(x,t)Y(t)\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\tau)Y(\tau)Y(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t G(x,\tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{8(\pi t)^{3/2}}\, d\tau \, ,$$

nezapomeňte, jaký tvar má Greenova funkce ve třech dimenzích. Toto už je jeden z tvarů řešení, který byl akceptovatelný, tj. uznávaný jako správný výsledek první části příkladu. Integrál lze ještě substitucí $2\sqrt{\tau}\eta = |x|$ upravit na

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi^{3/2}|x|} \int_{\frac{|x|}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\eta^2}\, d\eta \, , \tag{1}$$

[1] Samozřejmě toto lze udělat zcela korektně (podívejte se do zápisků z přednášky, tam se to dělalo), ale i takovéto odůvodnění mi stačilo – odůvodnění, ze které ho plyne, že víte, co se děje.

z čehož je vidět, že jde o tzv. neúplný Gaussův integrál, který nelze tedy vyjádřit v uzavřeném tvaru. Právě uvedený tvar je také vhodný pro výpočet limity, která se po nás chce, neboť integrál v (1) ze změní v úplný Gaussův, jehož hodnota je $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, a tedy

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{4\pi|x|}$$

pro $x \neq 0$, což se mělo spočíst. Mimochodem, jde o fundamentální řešení Laplaceova operátoru ve třech dimenzích. To se dá možná i odůvodnit, že pokud předchozí limita bude existovat, bude mít právě tuto hodnotu, ne? ☺. Ovšem nenechte se svést k nesprávnému zobecnění do dvou dimenzí: tam byste v limitě dostali nekonečnou teplotu v celém prostoru (zkuste si to spočíst). Tento výsledek se většinou interpretuje tak, že bodový zdroj tepla v počátku, který se zapne v čase nula (neboť přesně to je naše pravá strana v rovnici vedení tepla) dvoudimenzionální prostor „přehřeje“, kdežto ve třech dimenzích, kde je „víc místa“, se teplota ustálí.

---

3. [13b] Pro $k > 0$ nalezněte v prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ řešení rovnice

$$\Delta^2 u - k^2 \Delta u + k^4 u = \delta\,.$$

Dvojitý Laplaceův operátor je definován takto: $\Delta^2 u := \Delta(\Delta u)$.

Komentář k řešení: Jde o příklad 21 na straně 90 skript „Příklady z matematiky pro fyziky V.“

Řeší se standardně Fourierovou transformací podle proměnné x, což dá

$$\widehat{u} = \frac{1}{(2\pi|\xi|)^4 + (2\pi|\xi|)^2 k^2 + k^4}\,.$$

Inverzní Fourierova transformace je díky sférické symetrii rovna dopředné transformaci, a protože jsme ve třech dimenzích, lze použít vzorec pro F.T. radiálně symetrické funkce:

$$u(x) = u(|x|) = \frac{2}{|x|}\int_0^\infty \frac{r\sin(2\pi r|x|)}{(2\pi r)^4 + (2\pi r)^2k^2 + k^4}\,dr = \frac{1}{|x|}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{re^{2\pi i r|x|}}{(2\pi r)^4 + (2\pi r)^2 k^2 + k^4}\,dr\,.$$

Dost z vás zapomnělo na sudé rozšíření integrálu a tudíž ztrátu dvojky v čitateli zlomku před integrálem. Dále se dost z vás vrhlo v této chvíli hned na reziduovou větu, což není chyba, ale je to trošku pracné. Tvar jmenovatele integrálu vybízí k substituování a tím k jeho zjednodušení, například substituce $2\pi r = kz$ dá

$$u(x) = \frac{1}{4\pi^2 k^2|x|}\,\mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{ze^{ikz|x|}}{z^4+z^2+1}\,dz\,,$$

což se počítá mnohem líp. Spočíst správně kořeny jmenovatele vám taky dalo docela zabrat. Správně jste většinou položili např. $y = z^2$, našli kořeny rovnice y^2+y+1 jako $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ale potíž jste měli s odmocněním těchto čísel. Tam je nejlepší si uvědomit, že komplexní exponenciela se odmocňuje mnohem líp, napsat si $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}$, a pak už lehce nalézt 4 kořeny

$$z_{1,2} = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}}\,, \qquad z_{3,4} = e^{\pm\frac{\pi i}{3}}\,.$$

Při použití reziduové věty se uplatní jen kořeny v horní polorovině, což jsou

$$z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad z_3 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

a protože jde o jednoduché kořeny, dosazují se při výpočtu tyto kořeny do výrazu (který vznikne z výrazu za integračním znamením)

$$\frac{ze^{ikz|x|}}{4z^3+2z} = \frac{e^{ikz|x|}}{4z^2+2}\,.$$

Když se to celé dá dohromady, dostane se

$$u(x) = \frac{1}{4\pi^2k^2|x|}\,\mathrm{Im}\,2\pi i\left(\frac{e^{ik|x|\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{2i\sqrt{3}} - \frac{e^{ik|x|\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}{2i\sqrt{3}}\right) = \ldots = \frac{1}{2\pi k^2\sqrt{3}\,|x|}\sin\frac{k|x|}{2}e^{-\frac{k\sqrt{3}|x|}{2}}\,.$$
