Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 1}}$ **4.10.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

1. Zopakujte si odvození Gaussových-Greenových-Ostrogradského fomulí (věta o divergenci, per partes v m proměnných, 1. a 2. Greenova formule a důsledky). Použijte k tomu „Taháku z MA“, který je k mání na webovských stránkách cvičícího.

2. Dokažte multinomickou větu:

   Je-li $k, m \in \mathbb{N}$ a $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, pak

$$(x_1 + \cdots + x_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} \,, \tag{1.1}$$

   kde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ je multiindex a $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ jeho výška.

   <u>Návod:</u> Postupujte indukcí dle m a použijte binomickou větu (kterou považujeme za dokázanou) na výraz $\big((x_1 + \cdots + x_m) + x_{m+1}\big)^k$.

3. Spočtěte hodnotu Gaussova integrálu

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} \, dx = \pi^{\frac{m}{2}} \,, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

   <u>Návod:</u>

   (a) Nejprve spočteme onu hodnotu pro $m = 1$. Označíme $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx$ a dále použijeme následující trik (předávaný od jisté generace z generace na generaci): spočteme I^2 převodem na dvojnou integraci přes $\mathbb{R}^2$, a dále užijeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Kdo si ještě nevzpomněl, pak zde má podrobnější návod:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} r e^{-r^2} \, d\varphi \, dr \overset{[r^2=t]}{=} \frac{2\pi}{2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} \, dt = \pi \,,$$

   tedy $I = \sqrt{\pi}$ což dává výsledek pro $m = 1$. Z důvodů symetrie dále máme

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \,. \tag{1.3}$$

   (b) Pro $m = 2, 3, \dots$ uvažte, že

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} \, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} \cdots e^{-x_m^2} \, dx_1 \dots dx_m = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^m = (\sqrt{\pi})^m \quad \text{c.b.d.}$$

4. Definujeme tzv. gamma-funkci předpisem

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} \, dx \,. \tag{1.4}$$

   Ukažte:

   (a) $\Gamma(s) \in \mathbb{R}$ pro všechna $s > 0$.

   <u>Návod:</u> Studujte chování integrálu (1.4) v okolí nuly a v okolí ∞.

(b) $\Gamma(s) \in \mathcal{C}^\infty\big((0,\infty)\big)$.

Návod: Integrál (1.4) je integrál s parametrem a na to má pan Lebesgue techniku integrabilních majorant – pomocí nich ukažte, že Γ i všechny její derivace jsou spojité.

(c) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pro všechna $s > 0$.

Návod: Použijte per partes v integrálu pro $\Gamma(s+1)$.

(d) Pro $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Návod: $\Gamma(1)$ spočtěte přímo z (1.4), a dále použijte vztah $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ z předchozího bodu.

(e) Platí také

$$\Gamma(s) = 2\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2s-1}\,dy\,, \qquad s > 0\,. \tag{1.5}$$

Návod: Substituce $x = y^2$.

(f) Platí $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Návod: Dosaďte $s = \frac{1}{2}$ do (1.5) a užijte (1.3). Odvoďte dále vyjádření Γ-funkce ve všech bodech typu $n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, s použitím vlastnosti (c). Mělo by vám vyjít

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\Big(n-\frac{3}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}\,. \tag{1.6}$$

V posledním kroku jsme zlomek rozšířili součinem $2n(2n-2)\cdots 2$, z kterého jsme pak ve jmenovateli vytknuli „všechny dvojky“.

5. Pomocí sférických souřadnic v $\mathbb{R}^m$ spočtěte (pro PDR důležitý) povrch jednotkové sféry v dimenzi m, který se značívá $\varkappa_m$ a má hodnotu

$$\varkappa_m = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)}\,. \tag{1.7}$$

Návod:

- Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^m$ je možno zavést mnoha způsoby, jeden z nich je tento:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\,\cos\vartheta_1\,,\\ x_2 &= r\,\sin\vartheta_1\,\cos\vartheta_2\,,\\ x_3 &= r\,\sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3\,,\\ &\dots\\ x_{m-1} &= r\,\sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\dots\sin\vartheta_{m-2}\,\cos\vartheta_{m-1}\,,\\ x_m &= r\,\sin\vartheta_1\,\sin\vartheta_2\dots\sin\vartheta_{m-2}\,\sin\vartheta_{m-1}\,, \end{aligned} \tag{1.8}$$

  kde $r \in (0,\infty)$, $\vartheta_1,\dots,\vartheta_{m-2} \in (0,\pi)$, $\vartheta_{m-1} \in (0,2\pi)$. Jakobián této substituce je

$$J_m = r^{m-1}\underbrace{\sin^{m-2}\vartheta_1\,\sin^{m-3}\vartheta_2\dots\sin\vartheta_{m-2}}_{=:\widetilde{J}_m} > 0\,. \tag{1.9}$$

  Zkuste si dokázat (1.9) např. indukcí podle m. Udělejte si geometrickou představu o tom, jak se induktivně vytvářejí souřadnice (1.8). Úplně bude stačit, když si napíšete a porovnáte tyto souřadnice ve 2 a 3 dimenzích.

- Uvědomme si ještě, že pokud budeme uvažovat r v (1.8) rovno konstantní jedničce a necháme jinak všechny úhly probíhat své meze, „popíšeme“ tím přesně jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^m$. Tedy je

$$\varkappa_m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\widetilde{J}_m\,d\vartheta_1...d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1}\,, \tag{1.10}$$

  plocha jednotkové sféry v dimenzi m. Tím jsme ji ještě nespočetli, jen popsali.

- Hlavní trik výpočtu $\varkappa_m$ spočívá v tom, že integrál z (1.2) se spočte znovu a jinak, tentokrát pomocí výše uvedených sférických souřadnic, a oba výsledky se porovnají. Máme

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2}\,dx = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\dots\int\limits_0^{\pi} e^{-r^2} r^{m-1}\widetilde{J}_m\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1}\,dr \overset{(1.10)}{=} \varkappa_m\int\limits_0^\infty e^{-r^2} r^{m-1}\,dr\,. \tag{1.11}$$

Ale na konci řádku (1.11) s ulehčením spatříme $\int_0^\infty e^{-r^2} r^{m-1}\,dr = \frac{1}{2}\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)$ podle (1.4). Když navíc integrál vlevo v (1.11) nahradíme jeho hodnotou, kterou jsme spočetli v (1.2), dostaneme rovnost

$$\pi^{\frac{m}{2}} = \frac{1}{2}\,\varkappa_m\,\Gamma\Big(\frac{m}{2}\Big)$$

z které hned plyne (1.7).

6. S využitím (1.7) spočtěte objem $V_m(R)$ a povrch $S_m(R)$ koule v $\mathbb{R}^m$ s poloměrem R. Vyjádřete $\varkappa_m$, $V_m(R)$ a $S_m(R)$ zvlášť pro sudá a zvlášť pro lichá m.

Návod:

- Jste již zkušení s integrováním ve sférických m-dimenzionálních souřadnicích, proto vás tedy nepřekvapí, že

$$V_m(R) = \int\!\!\underset{|x|\le R}{\cdots}\!\!\int 1\,dx \overset{(1.8)}{=} \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\!\!\cdots\int_0^{\pi} r^{m-1}\widetilde{J}_m\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1}\,dr \overset{(1.10)}{=} \varkappa_m\frac{R^m}{m}\,. \tag{1.12}$$

  Podobně

$$S_m(R) = \int\!\!\underset{|x|=R}{\cdots}\!\!\int 1\,dx \overset{[(1.8)\text{ pro } r=R]}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\!\!\cdots\int_0^{\pi} R^{m-1}\widetilde{J}_m\,d\vartheta_1\cdots d\vartheta_{m-2}\,d\vartheta_{m-1} \overset{(1.10)}{=} \varkappa_m R^{m-1}\,. \tag{1.13}$$

- Jistě jste si všimli (a snad si umíte i odůvodnit), že

$$\frac{d}{dR}V_m(R) = S_m(R)\,, \qquad V_m(R) = \int_0^R S_m(r)\,dr\,.$$

- Pro $m = 2k$, resp. $m = 2k+1$ dostanete z (1.7), (1.12), (1.13), za použití vlastností Γ-funkce $\Gamma(k) = (k-1)!$ a (1.6) postupně

$$\varkappa_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}\,, \qquad \varkappa_{2k+1} = \frac{2^{k+1}k!\,\pi^k}{(2k)!}\,,$$

$$V_{2k}(R) = \frac{(\pi R^2)^k}{k!}\,, \qquad V_{2k+1}(R) = \frac{2^{k+1}k!\,\pi^k}{(2k+1)!}R^{2k+1}\,,$$

$$S_{2k}(R) = \frac{2\pi^k}{(k-1)!}R^{2k-1}\,, \qquad S_{2k+1}(R) = \frac{2^{k+1}k!\,\pi^k}{(2k)!}R^{2k}\,.$$