Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 3}}$ **18.10.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

1. Nalezněte charakteristiky a (metodou charakteristik) řešení následujících rovnic:

   (a) $u_x + yu_y = 0$, $u(0, y) = \frac{1}{y}$.

   Řešení: $u(x, y) = e^x/y$.

   (b) $u_t + uu_x = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, kde

   i. $\varphi(x) = 0$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = x$ pro $x > 0$,

   ii. $\varphi(x) = -x$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 0$ pro $x > 0$.

   iii. $\varphi(x) = 0$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 1$ pro $x \ge 1$, φ spojitá a po částech afinní funkce.

   iv. $\varphi(x) = 1$ pro $x \le 0$, $\varphi(x) = 0$ pro $x \ge 1$, φ spojitá a po částech afinní funkce.

   v. $\varphi(x) = \sin x$.

   Řešení: Protože pro tuto rovnici mají charakteristiky, vycházející z bodu $[x_0, 0]$, směrnici $1/\varphi(x_0)$ (spočtěte si to!), lze odtud odvodit, že v prvních třech případech existuje globální klasické řešení, zatímco v dalších dvou je klasické řešení definováno pouze lokálně.

   (c) $xzz_x + yzz_y = x^2 + y^2 + z^2$, $z(1, y) = y^2$.

   Návod: Podrobný návod na řešení naleznete na konci zápisu tohoto cvičení.[1]

   Řešení: $u(x, y) = 2(x^2 + y^2)\ln x - \frac{y^4}{x^2}$.

2.* Metodou charakteristik řešte následující úlohu[2] pro neznámou funkci $w = w(y, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}\Big(1 + sd\frac{\partial w}{\partial y}\Big), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ w(y, 0) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   M, σ, s, d jsou kladné (známé) konstanty. Uvažujte $|y| < \sigma$ a $t > 0$ dostatečně malé.

   Návod: Podrobný návod na řešení naleznete na konci zápisu tohoto cvičení.[1]

   Řešení: $w(y, t) = \frac{1}{s(d+1)}\big(\sigma - y - \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}\,\big)$.

3. Nalezněte řešení systému rovnic

$$U_t(x, t) + A \cdot U_x(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{3.1}$$
$$U(x, 0) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

   kde $A = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, a $f(x)$, $g(x)$ jsou dané funkce.

   Návod: Najděte regulární matici P tak, že $P^{-1}AP = D$, kde D je diagonální matice. Zaveďte novou vektorovou funkci $V = P^{-1}U$ a ukažte, že pro tuto funkci se systém rovnic rozpadne na dvě separované rovnice pro v_1 a v_2, které vyřešte každou zvlášť metodou charakteristik. Vyjde

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}f(x - 4t) + \frac{1}{2}f(x + 4t) + g(x - 4t) - g(x + 4t), \\ u_2 &= \frac{1}{4}f(x - 4t) - \frac{1}{4}f(x + 4t) + \frac{1}{2}g(x - 4t) + \frac{1}{2}g(x + 4t). \end{aligned}$$

[1] To znamená, že byste to mohli nejprve zkusit sami. ☺

[2] Výsledek této úlohy se uplatní v důkaze věty Cauchyho-Kowalevské.

4. Pro obecný systém s rovnic tvaru (3.1) ukažte, že pokud A je konstantní $s \times s$ diagonalizovatelná matice, lze postup z předchozího případu vždy použít a nalézt řešení takového systému. Připomeňte si, že matice mající různá reálná vlastní čísla je diagonalizovatelná.

Návody k řešení složitějších příkladů z tohoto cvičení.

Netvrdím, že uvedený postup je jediný možný. Je však konzistentní s postupem, který byl podrobně vysvětlen na přeadnášce.

- $xzz_x + yzz_y = x^2 + y^2 + z^2, \quad z(1, y) = y^2.$

Návod: Zaveďte novou funkci $u = z^2$ a zjistěte, že původní (kvazilineární) úloha je pro klasická řešení ekvivalentní úloze $xu_x + yu_y = 2x^2 + 2y^2 + 2u$, $u(1, y) = y^4$ pro neznámou funkci $u = u(x, y)$. Řešte pomocnou (lineární) úlohu (teorie k tomu — viz přednáška) pro $w = w(x, y, u)$ tvaru $xw_x + yw_y + (2x^2 + 2y^2 + 2u)w_u = 0$, $w(1, y, u) = u - y^4$. Řešíme např. pro $x > 0$, $y > 0$ (diskutujte proč musí být $x \neq 0$, $y \neq 0$). Charakteristiky této úlohy splňují rovnice $\frac{d}{dt}x = x$, $\frac{d}{dt}y = y$, $\frac{d}{dt}u = 2x^2 + 2y^2 + 2u$, což dává řešení $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^t$, $u = 2te^{2t}(x_0^2 + y_0^2) + u_0 e^{2t}$ (kde $x_0 = x(0)$ atd.). Vyloučením proměnné t lze získat charakteristickou přímku, procházející bodem $[x_0, y_0, u_0]$, jako průsečík dvou ploch $\frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0}$ a $u = 2(x_0^2 + y_0^2)\frac{x^2}{x_0^2} \ln \frac{x}{x_0} + u_0 \frac{x^2}{x_0^2}$. Tato přímka protíná rovinu, na které je dána počáteční podmínka, v bodě $[\overline{x}, \overline{y}, \overline{u}]$, který je charakterizován podmínkou $x = \overline{x} = 1$, což dá $\overline{y} = \frac{y_0}{x_0}$, $\overline{u} = -2(x_0^2 + y_0^2)\frac{1}{x_0^2} \ln x_0 + u_0 \frac{1}{x_0^2}$. Hodnota řešení $w(x_0, y_0, u_0)$ je podle teorie rovna hodnotě $w(1, \overline{y}, \overline{u})$, tedy $w(x_0, y_0, u_0) = w(1, \overline{y}, \overline{u}) = \overline{u} - \overline{y}^4 = -2(x_0^2 + y_0^2)\frac{1}{x_0^2} \ln x_0 + u_0 \frac{1}{x_0^2} - \frac{y_0^4}{x_0^4}$, což platí v libovolném bodě $[x_0, y_0, u_0]$ na charakteristice, tedy je možno index „nula“ nepsat. Na závěr z rovnice $w(x, y, u) = 0$ vypočteme u jako implicitně zadanou funkci.

- $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}\left(1 + sd\frac{\partial w}{\partial y}\right), \;\; w(y, 0) = 0.$

Návod: Řešíme tedy rovnici $w_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw} w_y = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}$. Řešme nejprve pomocnou lineární úlohu pro $z = z(y, t, w)$, a sice $z_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw} z_y + \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw} z_w = 0$ s počáteční podmínkou $z(y, 0, w) = w$. Charakteristiky této úlohy jsou popsány rovnicemi $\frac{d}{d\tau}t = 1$, $\frac{d}{d\tau}y = -\frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw}$, $\frac{d}{d\tau}w = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}$. První z těchto rovnic má triviální řešení $t = \tau + c$, proměnnou parametrizace τ však můžeme vhodně posunout, a proto bez újmy na obecnosti předpokládat, že $t = \tau$, tj. $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$, a psát

$$\frac{d}{dt}y = -\frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw}, \quad \frac{d}{dt}w = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}. \tag{3.3}$$

Úspěch při řešení tohoto systému bude záviset na tom, jestli budeme umět například vyjádřit y pomocí w a dosadit to do rovnice pro $\frac{d}{dt}w$. Udělejme to: z tvaru rovnic pro $\frac{d}{dt}y$ a $\frac{d}{dt}w$ je vidět, že $\frac{d}{dt}(y + sdw) = 0$, odkud máme pro $y(0) = y_0$, $w(0) = w_0$,

$$y + sdw = y_0 + sdw_0 \quad (=: c_0)\,. \tag{3.4}$$

Vypočítáme odtud y, dosadíme do druhé rovnice v (3.3), a obdržíme $\frac{d}{dt}w = \frac{M\sigma}{\sigma - c_0 + s(d-1)w}$, odkud dostaneme $(\sigma - c_0)w + \frac{s(d-1)}{2}w^2 = M\sigma t + C$. Pro $t = 0$ získáme hodnotu konstanty C a s její pomocí upravíme tento vztah na

$$(\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t = (\sigma - y_0)w_0 - \frac{s(d+1)}{2}w_0^2\,. \tag{3.5}$$

Rovnice (3.4), (3.5) nejen popisují charakteristiku, ale zároveň říkají, že $y + sdw$, $(\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t$ jsou konstantní na charakteristice. Odtud, pokud by to někoho zajímalo, plyne, že

$$z(y, t, w) = F\Big(y + sdw, (\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t\Big) \tag{3.6}$$

(kde F je dostatečně hladká) je obecným řešením problému $z_t - \frac{M\sigma sd}{\sigma - y - sw} z_y + \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw} z_w = 0$ (zkuste si dosadit). Na závěr musíme ještě z rovnice $z(y, t, w) = 0$ vypočítat $w = w(y, t)$. To by z obecného vztahu (3.6) bylo poněkud obtížné, pomůže však okrajová podmínka $w(y, 0) = 0$ pro w a okrajová podmínka $z(y, 0, w) = w$ pro z. Odtud pro implicitní funkci $z(y, 0, \overbrace{w(y, 0)}^{=0}) = 0$, tedy $F(y, 0) = 0$ pro všechna y, a proto F nemůže záviset na první proměnné. Pro výpočet w ze vztahu (3.6) se tedy dostáváme $0 = z(y, t, w) = f\Big((\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t\Big)$, což je totéž jako $(\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t = C$. Okrajová podmínka ($w = 0$ pro $t = 0$) dává však $C = 0$ a tedy máme

$$(\sigma - y)w - \frac{s(d+1)}{2}w^2 - M\sigma t = 0\,, \tag{3.7}$$

což je kvadratická rovnice pro w. Jejím formálním řešením dostaneme

$$w(y,t) = \frac{(\sigma - y) \pm \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)}\,. \tag{3.8}$$

Uvažujeme však $|y| < \sigma$ (viz zadání), tj. $\sqrt{(\sigma - y)^2} = (\sigma - y)$. Pak ovšem z okrajové podmínky $w(y,0) = 0$ plyne, že ve vztahu (3.8) je potřeba brát před odmocninou znaménko „mínus“, a tedy je

$$w(y,t) = \frac{(\sigma - y) - \sqrt{(\sigma - y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)}\,. \tag{3.9}$$