Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 6}}$ **8.11.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

1.* Všimněte si: rovnici $u_t + au_x = 0$ je možno zapsat ve tvaru

$$(\partial_t + a\partial_x)u = 0$$

a její všechna řešení mají tvar

$$u(x,t) = f(x - at)\,,$$

zatímco rovnici $u_t - a^2 u_{xx} = 0$ je možno zapsat ve tvaru

$$(\partial_t + a\partial_x)(\partial_t - a\partial_x)u = 0$$

a její všechna řešení mají tvar

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at).$$

Nenapadlo by vás přitom něco, co by mělo šanci zdolat rovnici $u_{tt} + a^2 u_{xx} = 0$?
Návod: Zkuste substituci obdobnou (s přihlédnutím k charakteru rovnice) substituci $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ a postupujte analogicky jako v případě vlnové rovnice. Pokud se dopracujete ke vzorci, který bude dosti podobný d'Alembertově vzorci (viz minulé cvičení), zkuste ověřit jeho platnost buď přímým dosazením výsledné funkce do rovnice nebo tím, že pomocí něho spočítáte tzv. Hadamardovo řešení Laplaceovy rovnice (viz bod 6 z programu čtvrtého cvičení).[1]

2. Uvažujte lineární PDR druhého řádu s konstantními koeficienty, v $\mathbb{R}^2$, tedy rovnici typu

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f\,. \tag{6.1}$$

Ukažte, že platí:

- (6.1) je eliptická $\iff$ $b^2 - 4ac < 0$;
- (6.1) je parabolická $\iff$ $b^2 - 4ac = 0$;
- (6.1) je hyperbolická $\iff$ $b^2 - 4ac > 0$.v

3. Uvažujte lineární PDR druhého řádu v kanonickém tvaru (vzhledem k nevyšším derivacím), tedy rovnici pro $u = u(y)$,

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \sum_{k=1}^{d} \beta_k(y)\frac{\partial u}{\partial y_k} + c(y)\,u = f(y)\,, \qquad \text{kde } \alpha_k(y) \in \{-1, 1, 0\}\,. \tag{6.2}$$

[1] Řešení sem pro pořádek napíšu, i když cennější jistě bude, když si je odvodíte sami: substituce $\xi = x - iat$, $\eta = x + iat$ (je vám jasné, proč zrovna tato? Věřili byste formálnímu rozpisu $u_{tt} + a^2 u_{xx} = (\partial_t + ia\partial_x)(\partial_t - ia\partial_x)u$?) nás dovede k rovnici $u_{\eta\xi} = 0$ a následně k obecnému řešení $u(x,t) = f(x - ait) + g(x + iat)$. S přihlédnutím k počátečním podmínkám dostaneme

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - iat) + \varphi(x + iat)}{2} + \frac{1}{2ia}\int_{x-iat}^{x+iat} \psi(s)\,ds\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0\,.$$

(Vlastně jde o formálně tytéž výpočty jako v případě vlnové rovnice). Přímým dosazením se přesvědčíme, že vzoref „funguje“. Použitím tohoto vzorce pro $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \frac{1}{n^k}\sin nx$ dostaneme $u(x,t) = \frac{1}{n^{k+1}}\sin nx \sinh nt$, což je očekávaná (Hadamardova) odpověď.

Ukažte, že v každém bodě y lze provést tyto úvahy:

(a) Pokud existuje takový index j, že $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ susbtitucí $u = v\, e^{-\frac{\beta_j y_j}{2\alpha_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:

- v rovnici pro v nebude člen, odpovídající β_j (odpovídající koeficient bude nulový)
- všechny koeficienty u členů druhého řádu zůstanou beze změny a všechny zbylé koeficienty u členů prvého řádu (s výjimkou výše zmíněného) zůstanou rovněž beze změny

Ta dvojka ve jmenovateli zlomku v exponenciele není překlep. Sledujte její roli při výpočtu.

(b) Pokud existuje takový index j, že $\alpha_j = 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ susbtitucí $u = v\, e^{-\frac{c y_j}{\beta_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:

- v rovnici pro v nebude absolutní člen, tj, člen odpovídající nulté derivaci (koeficientu c)
- všechny koeficienty u členů druhého i prvního řádu zůstanou beze změny

4. Pomocí výše uvedených dvou substitucí ukažte, že každou lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty lze vhodnými substitucemi převést na jeden z následujících typů:

- Eliptickou rovnici na $-\Delta u + ku = f$. Pro $k = 0$ jde o tzv. Laplace-Poissonovu rovnici, pro $k \neq 0$ o rovnici Helmholtzova typu. Koeficient k, je-li nenulový, obecně nelze „vynulovat“.
- Parabolickou rovnici na $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$, tj. na rovnici vedení tepla. Všechny parabolické lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty jsou tedy nějakou rovnicí vedení tepla.
- Hyperbolickou rovnici na $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u + ku = f$, tj. na vlnovou rovnici. Koeficient k, je-li nenulový, obecně nelze „vynulovat“.

5. Určete typ rovnice, převeďte na kanonický tvar, případně převeďte na jednu z rovnic z předchozího bodu, případně se pokuste vyřešit, pokud se po převedení dostanete na „řešitelný typ“ rovnice.

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0$

<u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\chi = 2x - 2y + z$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2}$ dostaneme rovnici $\Delta v = \frac{1}{4} v$. Jde o eliptickou rovnici (Helmholtzova typu).

(b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0$

<u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{2} - x$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2 + \eta/4}$ dostaneme eliptickou rovnici (Helmholtzova typu) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{5}{16} v$.

(c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$

<u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - 2x$ dostaneme parabolickou rovnici $u_\eta - u_{\xi\xi} = 0$.

(d) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$

<u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{\eta/4}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{3}{16} v$.

(e) $4u_{xy} - 3u_{yy} + 4u_x - 8u_y - 5u = 0$,
řešte obecně a poté s podmínkami $u(x, 0) = e^{\frac{x}{2}}$, $u_y(x, 0) = 0$.

<u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x + y$, $\eta = x + 2y$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{2\xi - \frac{3}{2}\eta}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - 4v_{\eta\eta} = 0$. Její obecné řešení je $v(\xi, \eta) = f(\eta - 2\xi) + g(\eta + 2\xi)$, tedy $u(x, y) = e^{\frac{x}{2} - y}\big(f(x) + g(3x + 4y)\big)$. Okrajové podmínky dají $u(x, y) = e^{\frac{x}{2} - y}(1 + y)$.

6.* A další sada příkladů pro vaše samostatné počítání: v každé oblasti, kde se nemění typ rovnice, najděte její kanonický tvar.

(a) $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$

(b) $u_{xx} - 2 \sin x\, u_{xy} + (2 - \cos^2 x)\, u_{yy} = 0$

(c) $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0$

(d) $y u_{xx} - x u_{xy} = 0$

(e) $(1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + y u_y = 0$