Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 **č. 7** **15.11.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

1. Poznámky o plošné integraci v $\mathbb{R}^3$

1.1 Plošný integrál 1. druhu v $\mathbb{R}^3$

Buď $S \subset \mathbb{R}^3$ hladká 2-plocha, tj. plocha parametrizovaná zobrazením

$$\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \qquad \Omega \text{ otevřená}, \qquad \vec{\varphi}(\Omega) = S , \qquad \vec{\varphi} : \begin{cases} x = \varphi_1(u,v) , \\ y = \varphi_2(u,v) , \\ z = \varphi_3(u,v) , \end{cases} \tag{7.1}$$

přičemž $\vec{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\vec{\varphi}$ je prosté na Ω, $\vec{\varphi}^{\,-1} \in \mathcal{C}(S)$, a[1]

$$\text{hodnost matice } \left(\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(u,v)} \right) = 2 \qquad \forall (u,v) \in \Omega . \tag{7.2}$$

Podmínka (7.2) říká, že vektory[2] $\vec{\varphi}_u$ a $\vec{\varphi}_v$, které mají geometrický význam tečných vektorů k ploše S v bodě $\vec{\varphi}(u,v)$, jsou lineárně nezávislé pro všechna $(u,v) \in \Omega$, a tvoří tedy bázi dvojrozměrného tečného prostoru k S v bodě[3] $\vec{\varphi}(u,v)$. Vektorový součin $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v$ má směr normálového vektoru k ploše S a jeho velikost $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|$ je číselně rovna plošnému obsahu rovnoběžníka se stranami $\vec{\varphi}_u$ a $\vec{\varphi}_v$. Definujme na základě této heuristické úvahy tzv. *plošný integrál 1. druhu* z funkce $f : S \to \mathbb{R}$ přes plochu S takto:

$$\int_S f\, dS := \int_\Omega f(\vec{\varphi}(u,v))\, \|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|(u,v)\, du\, dv , \tag{7.3}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

Tato definice vychází z intuitivní představy objemu tělesa „mezi grafem funkce f a plochou S“. Skutečně lze ukázat, že hodnota integrálu $\int_S \rho\, dS$ je číselně rovna „hmotnosti plochy S s hustotou ρ“, a podobně hodnota integrálu $\int_S 1\, dS$ je číselně rovna dvourozměrné (Haussdorfově) míře plochy S. K ověření tohoto druhého faktu bychom samozřejmě nejprve museli definovat „křivou“ (tedy Hausdorffovu) dvourozměrnou míru na S a vybudovat Lebesgueův integrál na S vůči této míře.

Korektnost definice (7.3): lze ukázat, že číselná hodnota výrazu na pravé straně (7.3) nezávisí na konkrétní volbě parametrizace (7.1)–(7.2) a plošný integrál 1. druhu je tedy definován korektně. Zformulujte toto tvrzení přesně a dokažte je.

Cvičení 7.1 Jiný způsob výpočtu tzv. metrického členu $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|$ se opírá o následující identitu (determinant vpravo se nazývá *Grammův*):

$$\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|^2 = \det \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_u & \vec{\varphi}_u \cdot \vec{\varphi}_v \\ \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_u & \vec{\varphi}_v \cdot \vec{\varphi}_v \end{vmatrix} . \tag{7.4}$$

Dokažte tuto identitu.

Cvičení 7.2 Spočtěte povrch plochy, která je popsána parametrizací:

$$\vec{\varphi} : \begin{cases} x = (R + r\cos u)\cos v , \\ y = (R + r\cos u)\sin v , \\ z = r \sin u , \end{cases} \qquad u,v \in (0,2\pi) , \qquad 0 < r < R . \tag{7.5}$$

[1] Rozmyslete si, že podmínka $\vec{\varphi}^{\,-1} \in \mathcal{C}(S)$ znamená, že se plocha S „nedotýká sama sebe“.

[2] Označujeme $\vec{\varphi}_u \equiv \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} \right)$ a podobně pro parciální derivaci podle v.

[3] Plocha S je tedy „všude dvourozměrná“, její dimenze „nikde nedegeneruje“.

O jakou jde plochu?

Řešení: Jde o torus (pneumatiku, anuloid, ...) a povrch by vám měl vyjít $4\pi^2 rR = 2\pi r \cdot 2\pi R$. To je docela hezký výsledek, ne? ☺

Cvičení 7.3 Parametrizujte kouli v $\mathbb{R}^3$ a spočtěte její povrch.

Řešení: Kouli lze parametrizovat například pomocí zobrazení $\vec{\varphi}$: ($x = r\cos u \cos v$, $y = r \sin u \cos v$, $z = r \sin v$), $v \in (-\pi/2, \pi/2)$, $u \in (0, 2\pi)$, $r > 0$ pevné. Dostaneme postupně $\vec{\varphi}_u = (-r\sin u \cos v, r\cos u \cos v, 0)$, $\vec{\varphi}_v = (-r\cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r\cos v)$, $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\| = r^2 \cos v$, načež

$$\int_S 1\,dS = 2\pi \cdot r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v\,dv = 4\pi r^2\,.$$

Cvičení 7.4 Ukažte: je-li plocha S zadána explicitně, jako graf hladké funkce $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to S$, tedy pokud je $S := \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3\,;\ z = \psi(x, y)\,;\ (x, y) \in \Omega\}$, pak

$$\int_S f\,dS = \int_\Omega f(x, y, \psi(x, y))\,\sqrt{1 + |\nabla\psi|^2}\,dx\,dy\,. \tag{7.6}$$

Návod: Z explicitního zadání plochy pomocí $z = \psi(x, y)$ lze vyrobit parametrizaci $\vec{\varphi}$: ($x = x$, $y = y$, $z = \psi(x, y)$), $(x, y) \in \Omega$. Zbytek plyne přímým výpočtem.

1.1 Plošný integrál 2. druhu v $\mathbb{R}^3$

Definujme tzv. *plošný integrál 2. druhu* z vektorové funkce $\vec{T} : S \to \mathbb{R}^3$ přes *orientovanou* plochu S takto:

$$\int_S \vec{T}\,d\vec{S} := \int_\Omega \vec{T}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot (\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v)\,(u, v)\,du\,dv\,, \tag{7.7}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

Intuitivně jde o situaci, kdy se „integruje průmět vektorové funkce $\vec{T}$ do normálového směru $\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v$“ tedy jde o práci vykonanou silovým polem $\vec{T}$ přes plochu S.
Korektnost definice (7.7) plyne z následujícího:

Cvičení 7.5 (a) Položme[4] $\vec{\nu} := \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$. Pak $\vec{\nu}$ má geometrický význam jednotkového normálového vektoru k ploše S v bodě $\vec{\varphi}(u, v)$. Plocha S je tímto vektorem orientována. Ukažte s využitím definice $\vec{\nu}$, a definic (7.3) a (7.7), že platí následující vztahy mezi integrály prvního a druhého druhu:

$$\int_S \vec{T}\,d\vec{S} = \int_S \vec{T} \cdot \vec{\nu}\,dS\,, \qquad \int_S f\,dS = \int_S f\vec{\nu}\,d\vec{S}\,, \tag{7.8}$$

kde f resp. $\vec{T}$ mají stejný význam jako v (7.3) resp. (7.7). Na základě těchto rovností se také někdy formálně píše $d\vec{S} = \vec{\nu}\,dS$. Také můžete někdy spatřit formální zápis $d\vec{S} = (dy\,dz, dx\,dz, dx\,dy)$, pak pro $\vec{T} = (P, Q, R)$ lze psát

$$\int_S \vec{T}\,d\vec{S} = \int_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy\,. \tag{7.9}$$

Teď už možná budete rozumět např. zápisu $\int_S x^2\,dy\,dz + z^2\,dx\,dy$ správně: jde o plošný integrál 2. druhu $\int_S \vec{T}\,d\vec{S}$, kde $\vec{T} = (x^2, 0, z^2)$.

(b) Z prvního ze vztahů (7.8) odvoďte, že plošný integrál druhého druhu je definován korektně v následujícím slova smyslu: jsou-li $\vec{\varphi}$ a $\vec{\psi}$ dvě parametrizace plochy S, pak se hodnoty integrálu $\int_S \vec{T}\,d\vec{S}$, při jejichž výpočtu používáme buď parametrizaci $\vec{\varphi}$ nebo parametrizaci $\vec{\psi}$, liší maximálně o znaménko, to podle toho, jestli se výrazy $\frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$ a $\frac{\vec{\psi}_u \times \vec{\psi}_v}{\|\vec{\psi}_u \times \vec{\psi}_v\|}$ liší v odpovídajících bodech o znaménko nebo ne (v obou případech jde o jednotkové vektory normály k S, jsou to tedy vektory buď stejné nebo opačně orientované). Uvědomte si, že parametrizace tak definuje orientaci plochy.

[4] Uvědomte si, že z (7.2) vyplývá $\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\| \neq 0$.

2. Poznámky o plošné integraci v $\mathbb{R}^d$

2.1 Plošný integrál 1. a 2. druhu v $\mathbb{R}^d$

Nejprve dvě poznámky: (i) budeme postupovat analogicky jako ve třech dimenzích, pokud si to uvědomíte, pomůže to možná vaší představě; (ii) zmíníme zde plošný integrál pouze přes plochu S dimenze $(d-1)$ v $\mathbb{R}^d$. Taková plocha bude mít v každém svém bodě opět pouze „jeden“ normálový vektor (přesněji prostor normálových vektorů bude mít v každém bodě S dimenzi 1). Složitější případy integrací přes plochy dimenze k v $\mathbb{R}^d$, $1 < k < d-1$, zde nebudeme diskutovat.
Buď $S \subset \mathbb{R}^d$ hladká $(d-1)$-plocha, tj. plocha parametrizovaná zobrazením

$$\vec{\varphi} : \Omega \subset \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^d , \qquad \Omega \text{ otevřená}, \qquad \vec{\varphi}(\Omega) = S , \qquad \vec{\varphi} : \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots , u_{d-1}) , \\ x_2 = \varphi_2(u_1, \ldots , u_{d-1}) , \\ \quad \cdots \\ x_d = \varphi_d(u_1, \ldots , u_{d-1}) , \end{array} \right. \tag{7.10}$$

přičemž $\vec{\varphi} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $\vec{\varphi}$ je prosté na Ω, $\vec{\varphi}^{\,-1} \in \mathcal{C}(S)$, a

$$\text{hodnost matice } \left(\frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_d)}{D(u_1, \ldots , u_{d-1})} \right) = d-1 \qquad \forall u \in \Omega . \tag{7.11}$$

Podmínka (7.11) opět říká, že vektory $\vec{\varphi}_{u_1}, \ldots , \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$, které mají geometrický význam tečných vektorů k ploše S v bodě $\vec{\varphi}(u)$, jsou lineárně nezávislé pro všechna $u \in \Omega$, a tvoří tedy bázi $(d-1)$-rozměrného tečného prostoru k S v bodě $\vec{\varphi}(u)$. Vektorový součin[5] $\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$ má směr normálového vektoru k ploše S a jeho velikost $\|\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}\|$ je číselně rovna objemu rovnoběžnostěnu s hranami $\vec{\varphi}_{u_1}, \ldots , \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$. Definujeme tedy *plošný integrál 1. druhu* z funkce $f : S \to \mathbb{R}$ přes plochu S takto:

$$\int_S f \, dS := \int_\Omega f(\vec{\varphi}(u)) \, \|\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}\|(u) \, du , \tag{7.12}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu), a dále definujeme *plošný integrál 2. druhu* z vektorové funkce $\vec{T} : S \to \mathbb{R}^d$ přes *orientovanou* plochu S takto:

$$\int_S \vec{T} \, d\vec{S} := \int_\Omega \vec{T}(\vec{\varphi}(u)) \cdot \left(\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}\right)(u) \, du , \tag{7.13}$$

pokud existuje integrál na pravé straně (například v Lebesgueově smyslu).

Cvičení 7.6 (a) Označíme-li J matici z (7.11),

$$J(u) := \left(\frac{D(\varphi_1, \ldots \varphi_d)}{D(u_1, \ldots , u_{d-1})} \right) , \qquad u \in \Omega , \tag{7.14}$$

pak platí zobecnění Grammova vztahu (7.4)

$$\|\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}\|^2 = \det \left(J \cdot J^T\right) . \tag{7.15}$$

Dokažte tuto identitu.

(b) Napište a dokažte vztahy, obdobné vztahům (7.8). Vyslovte tvrzení o korektnosti definic (7.12) a (7.13). Diskutujte pojem orientace plochy S dimenze $(d-1)$ v $\mathbb{R}^d$.

---

[5]Vektorový součin $\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$ lze definovat například tak, že provedeme formální rozvoj determinantu

$$\det \begin{vmatrix} \vec{\varphi}_{u_1} \\ \cdots \\ \vec{\varphi}_{u_{d-1}} \\ e_1, \ \ldots, \ e_d \end{vmatrix}$$

podle posledního řádku, načež člen stojící u e_k považujeme za k-tou souřadnici vektorového součinu $\vec{\varphi}_{u_1} \times \cdots \times \vec{\varphi}_{u_{d-1}}$.