Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 8}}$ **22.11.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

8.1 Fourierova metoda řešení Laplaceovy rovnice na obdélníku

• **Dirichletova okrajová podmínka „na jedné straně obdélníka"**
Budeme řešit následující Dirichletovu (= s předepsanými hodnotami hledané funkce na hranici) úlohu pro Laplaceovu rovnici:

$$\begin{array}{lll} \text{rovnice} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & \text{pro } [x,y]\in(0,a)\times(0,b)\,, \\ \text{okrajová podmínka} & u(x,0)=g(x)\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & u(x,b)=0\,, & x\in\langle 0,a\rangle\,, \\ & u(0,y)=0\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,, \\ & u(a,y)=0\,, & y\in\langle 0,b\rangle\,. \end{array} \tag{8.1}$$

Přirozeně předpokládáme $a>0$, $b>0$, a dále $g(0)=0$, $g(a)=0$, aby okrajová podmínka byla spojitá na hranici.
Funkci $u(x,y)$ budeme nejprve hledat ve speciálním „separovaném" tvaru, jako součin dvou funkcí,

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \tag{8.2}$$

a dosadíme tento „ansatz"[1] do rovnice (8.1). Dostaneme

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2}+X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2}=0\,. \tag{8.3}$$

Na základě tvaru hledaného řešení (8.2) se rozhodneme, že nás budou především zajímat ta řešení X, Y, která jsou nenulová alespoň v nějaké podoblasti obdélníka $(0,a)\times(0,b)$. V takových množinách lze upravit (8.3) na

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}=-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}\,.$$

Levá strana je závislá pouze na proměnné x, pravá strana je závislá pouze na proměnné y, a rovnost má platit pro všechna $[x,y]\in(0,a)\times(0,b)$, obě strany rovnice proto musí být rovny společné konstantě, kterou označme λ. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda\,, \tag{8.4}$$

$$-\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = \lambda\,. \tag{8.5}$$

K první obyčejné diferenciální rovnici (8.4) máme ze zadání (8.1) i okrajové podmínky $X(0)=0$ a $X(a)=0$ (které plynou z $u(0,y)=0$ a $u(a,0)=0$). Proto řešíme nejprve tuto úlohu.[2] Řešení pro funkci X je toto: pro $\lambda\geq 0$ neexistuje žádné netriviální řešení (tj. existuje pouze řešení rovné identické nule), taková řešení nás však nezajímají. Naštěstí pro $\lambda<0$ existuje netriviální řešení rovnice (8.4), splňující příslušné okrajové podmínky $X(0)=0$ a $X(a)=0$, nastane to však jen tehdy, když[3]

$$\lambda_n=-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\,,\qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

[1] Pro německé slovo „ansatz" se někdy používá nepěkný překlad „násada". Myslím, že lepší varianta je buď použít opisu „vyjádřit funkci ve tvaru" nebo se k tomu postavit například stejně jako v anglicky mluvících zemích: říkat „ansatz". ☺

[2] Všimněte si, že pro funkci Y bychom měli jednak okrajovou podmínku $Y(b)=0$, dále však „podivnou" podmínku $X(x)Y(0)=g(x)$, která by plynula z $u(x,0)=g(x)$. To ukazuje, že „ansatz" (8.2) není úplně správně. Půjde jej však časem poněkud upravit, aby bylo možno splnit i onu „podivnou" podmínku.

[3] Proveďte podrobně.

Potom

$$X_n(x) = c_n \sin\left(x\sqrt{|\lambda|}\right) = c_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right),$$

kde c_n jsou libovolné konstanty.
Pro tato λ_n se nyní pokusíme vyřešit rovnici (8.5) pro $Y(y)$ resp. $Y_n(y)$,

$$\frac{d^2Y_n(y)}{dy^2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y).$$

Obecným řešením této rovnice je

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y},$$

kde a_n a b_n jsou libovolné konstanty.
Jednu z okrajových podmínek pro Y lze splnit, a sice $Y(b) = 0$ (tato podmínka je důsledkem okrajové podmínky $u(x,b) = 0$), což dává

$$a_n e^{\frac{n\pi}{a}b} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}b} = 0,$$

odkud dostaneme

$$b_n = -a_n e^{-\frac{2n\pi}{a}b},$$

a tedy

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}\right).$$

Celkem jsme tedy nalezli nekonečně mnoho funkcí typu (8.2),

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = d_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

kde d_n jsou libovolné konstanty. Všechny tyto funkce splňují $\Delta u_n = 0$ ve všech vnitřních bodech obdélníka $(0,a)\times(0,b)$, a také okrajové podmínky $u_n(x,b) = 0$, $u_n(0,y) = 0$ a $u_n(a,y) = 0$.
Ukažme si, jakým způsobem lze zajistit splnění i zbývající okrajové podmínky. Řešení celého problému (8.1) budeme hledat jako nekonečný součet funkcí typu $u_n(x,y)$,

$$u(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\left(e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Takto definovaná funkce u nepochybně splňuje okrajové podmínky $u(x,b) = 0$, $u(0,y) = 0$ a $u(a,y) = 0$, a pokud bude uvedená řada konvergovat „dostatečně rozumně“ (budeme tento případ podrobně diskutovat za chvíli), tak bude možno provést derivování za znamením sumy, a tedy dostaneme $\Delta u = \Delta\big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n(x,y) = 0$.
Zbývá zajistit platnost okrajové podmínky $u(x,0) = g(x)$. Předpokládejme, že funkci $g(x)$ lze rozvést do sinové Fourierovy řady:[4]

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right), \quad \text{kde} \quad \gamma_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx. \tag{8.6}$$

Podmínka $u(x,0) = g(x)$ je pak vyjádřena rovnicí

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{\frac{n\pi}{a}b}\left(e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right) = g(x),$$

odkud z jednoznačnosti Fourierových rozvojů plyne vztah mezi konstantami d_n a koeficienty Fourierova rozvoje γ_n,

$$d_n e^{\frac{n\pi}{a}b} = \frac{\gamma_n}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}},$$

a tedy dostáváme (zatím pouze formálně) řešení našeho problému ve tvaru řady:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad \text{kde} \quad \gamma_n = \frac{2}{a}\int_0^a g(x)\sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right)dx. \tag{8.7}$$

[4] I tento požadavek budeme diskutovat v následujícím paragrafu.

• Diskuse formálního výsledku[5] **(8.7).**
Nejprve si ujasněme, co vše potřebujeme k rigoróznímu důkazu toho, že funkce (8.7) je řešením našeho problému (8.1). Tvrdím, že k tomu stačí, když ukážeme:

1. Funkce g je rozvinutelná do <u>sinové</u> Fourierovy řady (8.6), přičemž první z rovností (8.6) platí bodově pro všechna $x \in \langle 0, a \rangle$.

2. Řada v (8.7), i řady, které vzniknou formálními prvními a druhými derivacemi podle x a y za znamením sumy v (8.7), konvergují lokálně stejnoměrně na $(0, a) \times (0, b)$.

3. Řada v (8.7) konverguje stejnoměrně na $\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle$.

Potom totiž:

a) Z bodu 2 výše plyne, že řadu (8.7) lze dvakrát derivovat člen po členu v každém bodě $[x, y] \in (0, a) \times (0, b)$, tedy máme $\Delta u(x, y) = \Delta\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)\big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta u_n(x, y) = 0$. Dále bod 2 implikuje, že $u \in \mathcal{C}^2((0, a) \times (0, b))$.

b) Bod 3 implikuje, že $u \in \mathcal{C}(\langle 0, a \rangle \times \langle 0, b \rangle)$. Speciálně odtud plyne, že hodnoty funkce u na hranici obdélníka lze obdržet přímým dosazením příslušných hraničních bodů do řady (8.7). Tedy

$$
\begin{aligned}
u(0, y) &= 0\,, && y \in \langle 0, b \rangle\,, \\
u(a, y) &= 0\,, && y \in \langle 0, b \rangle\,, \\
u(x, b) &= 0\,, && a \in \langle 0, a \rangle\,, \\
u(x, 0) &\stackrel{(8.7)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) \stackrel{(8.6)}{=} g(x)\,, && x \in \langle 0, a \rangle\,.
\end{aligned}
$$

Poslední rovnost plyne pochopitelně z bodu 1 výše.

Věnujme se nyní podrobněji bodům 1–3 výše.

ad 1. Dodefinujeme nejprve funkci g <u>liše</u> na interval $\langle -a, 0 \rangle$ a označíme toto rozšíření opět g. Protože $g(0) = 0$, je $g \in \mathcal{C}(\langle -a, a \rangle)$, platí tedy také $g \in L^1((-a, a))$ a $g \in L^2((-a, a))$. Odtud plyne:

- $g \in L^1((-a, a)) \implies$ na intervalu $(-a, a)$ existuje Fourierova řada funkce g vzhledem k úplnému trigonomickému systému $\{1, \sin(\frac{\pi n}{a} x), \cos(\frac{\pi n}{a} x)\}$; z lichosti funkce g na intervalu $(-a, a)$ plyne, že nenulové jsou pouze Fourierovy koeficenty u funkcí $\sin(\frac{\pi n}{a} x)$, z L^1 integrability g dále plyne, že tyto Fourierovy koeficienty jsou omezené. Tedy:

$$
\gamma_n := \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(x \frac{n\pi}{a}\right) dx \qquad \implies \qquad \exists c > 0\,, \quad |\gamma_n| \le c\,; \tag{8.8}
$$

- $g \in L^2((-a, a)) \implies$ první z rovností (8.6) platí alespoň skoro všude na intervalu $\langle 0, a \rangle$; k tomu, aby tato rovnost platila ve všech bodech $\langle 0, a \rangle$ potřebujeme obecně vědět něco víc. Například pokud víme, že řada v (8.6) konverguje na $\langle 0, a \rangle$ stejnoměrně, je jejím součtem spojitá funkce; ta je ovšem skoro všude na $\langle 0, a \rangle$ rovna spojité funkci g, tedy první rovnost v (8.6) platí ve všech bodech, což jsme chtěli vědět. Zmíněná stejnoměrná konvergence je například důsledkem vyšší hladkosti funkce g, neboť platí:

$$
g \in \mathcal{C}^1(\langle 0, a \rangle) \qquad \implies \qquad \sum |\gamma_n| < \infty\,, \tag{8.9}
$$

odkud podle Weierstrassova kriteria obdržíme stejnoměrnou konvergenci řady v (8.6). Výsledek (8.9) budeme ještě potřebovat.

[5] Byl bych rád, kdybyste si z následující diskuse odnesli jednak dojem, že kdybyste chtěli, uměli byste každý výpočet provedený touto metodou odůvodnit rigorózně, a jednak pocit, že není nezbytně nutné, abyste to vždy dělali. ☺

ad 2. Provedeme následující klíčový odhad členů řady (8.7):

$$A_n := \left| \gamma_n \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \right| \le |\gamma_n|\, e^{-\frac{n\pi}{a}y} \underbrace{\left| \frac{1 - e^{-\frac{2n\pi}{a}(b-y)}}{1 - e^{-\frac{2n\pi}{a}b}} \right|}_{=:Z} \le c\,|\gamma_n|\, e^{-\frac{n\pi}{a}y}\,, \tag{8.10}$$

neboť výraz Z je omezen konstantou $c > 0$ (je $n > 1$ a tedy jmenovatel je odražený od nuly, zatímco čitatel je omezený shora). Pro použití Weierstrassova kriteria pro stejnoměrnou konvergenci je potřeba, aby výraz vpravo v (8.10) byl dále odhadnut členy konvergentní číselné řady (tj. řady, jejíž členy nezávisí na y) . Kdyby platilo (8.9), stačilo by uvážit, že $|e^{-\frac{n\pi}{a}y}| \le 1$, my však máme obecně pouze omezenost koeficientů γ_n (viz (8.8)), a tedy obecně $A_n \le c$, kterýžto odhad nelze pro $y \in \langle 0, b\rangle$ a omezená γ_n zlepšit. Proto se omezíme pouze na $y \ge \varepsilon$, což nám dá

$$A_n \le c\,|\gamma_n|\, e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon} \le \tilde{c}\, e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}\,, \quad y \ge \varepsilon\,, \qquad \forall \varepsilon > 0\,, \tag{8.11}$$

odkud plyne, že řada (8.7) je stejnoměrně konvergentní na $\langle 0, a\rangle \times \langle \varepsilon, b\rangle$ pro libovolné $\varepsilon > 0$ a je tedy lokálně stejnoměrně konvergentní (dokonce) na $\langle 0, a\rangle \times (0, b\rangle$.

Řady, které vzniknou formálním prvním či druhým derivováním (podle x či y) za znamením sumy v (8.7) se budou lišit od řady v (8.7) zejména tím, že budou obsahovat členy $\left(\frac{n\pi}{a}\right)^k$, kde $k = 1, 2$ je počet provedených derivací. Proto lze členy těchto řad odhadnout naprosto stejným postupem pomocí

$$\tilde{c}\, n^k e^{-\frac{n\pi}{a}\varepsilon}\,, \quad y \ge \varepsilon\,, \qquad \forall \varepsilon > 0\,, \tag{8.12}$$

což jsou opět členy konvergentní číselné řady. Bod 2 je tedy ukázán, dokonce i pokud platí pouze $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$.

ad 3. Už v předchozím bodě jsme naznačili, že pokud by platilo $\sum |\gamma_n| < \infty$ (tj. například pro $g \in \mathcal{C}^1(\langle 0, a\rangle)$), lze odhad (8.11) upravit takto:

$$A_n \le c\,|\gamma_n|\, e^{-\frac{n\pi}{a}y} \le c|\gamma_n| \qquad \forall y \ge 0\,, \tag{8.13}$$

což dává kýženou stejnoměrnou konvergenci řady (8.7) na celém uzavřeném obdélníku $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$. Pro obecné $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$ je nutno postupovat opatrněji:

- Aproximujeme funkci $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$ posloupností funkcí[6] $g_m \in \mathcal{C}^1(\langle 0, a\rangle)$, takových, že $g_m(0) = g_m(a) = 0$ a $g_m \rightrightarrows g$ na $\langle 0, a\rangle$.
- Postupem jako výše odvodíme, že pro $\gamma_{mn} = \frac{2}{a}\int_0^a g_m(x) \sin\left(x\frac{n\pi}{a}\right) dx$ jsou funkce

$$u_m(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{mn} \frac{e^{\frac{n\pi}{a}(y-b)} - e^{\frac{n\pi}{a}(b-y)}}{e^{-\frac{n\pi}{a}b} - e^{\frac{n\pi}{a}b}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{8.14}$$

  řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na obdélníku $(0, a) \times (0, b)$ s okrajovou podmínkou $g_m(x)$ pro $y = 0, x \in \langle 0, a\rangle$, a jinde nulovou.
- Lze ukázat (viz přednáška - například 1. věta Harnackova nebo Princip maxima), že potom $u_m \rightrightarrows u$ na $\langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle$, přičemž u je klasickým řešením úlohy (8.1) u tím je náš problem vyřešen.[7]

[6] Rozmyslete si, že to lze.

[7] Ovšem pozor, tato limitní funkce u pouze „existuje“, ale pro obecné $g \in \mathcal{C}(\langle 0, a\rangle)$ nemusí být vyjádřitelná řadou tvaru (8.7). Pokud chcete mít řešení v tomto tvaru, musíte takjakotak zadat okrajovou podmínku g „o něco lepší“ než pouze spojitou. Tak co, sílí ve vás pocit, zmíněný v poznámce pod čarou číslo 5? ☺