Cvičení z PDR1 (DIR044)

ZS 2007/08 $\boxed{\textbf{č. 11}}$ **13.12.2007**

M. Rokyta, KMA MFF UK
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/`

11.1 Rovnice vedení tepla na celém $\mathbb{R}^d$ (Cauchyova úloha)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,, \tag{11.1}$$

$$u|_{t=0} = g\,. \tag{11.2}$$

• Greenova funkce (elementární řešení, klademe formálně $f = 0$, $g = \delta$):

$$\widehat{G}(\xi, t) = e^{-4\pi^2 a^2 |\xi|^2 t}\,, \qquad G(x, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}\,.$$

Symbolem $\widehat{\ }$ zde značíme Fourierovu transformaci v prostorové proměnné[1] x,

$$F(f)(\xi) \equiv \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx \quad \text{s inverzí} \quad F_{-1}(f)(x) \equiv \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, e^{2\pi i x\cdot\xi}\, d\xi\,.$$

• Řešení úlohy (11.1)–(11.2) na celém prostoru je pak definováno (jsou-li f, g distribuce, resp. integrovatelné nebo spojité funkce) takto[2]:

$$u = G \underset{x}{\star} g + H(t) G \underset{x,t}{\star} f\,, \quad \text{resp.} \tag{11.3}$$

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, G(x - y, t)\, dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(y, \tau)\, G(x - y, t - \tau)\, dy\, d\tau\,. \tag{11.4}$$

• Úloha na polopřímce $x > 0$ za hraniční podmínky $u(0+, t) = 0$: liché rozšíření funkce g; úloha na polopřímce $x > 0$ za hraniční podmínky $\partial_x u(0+, t) = 0$: sudé rozšíření funkce g.

11.2 Vlnová rovnice na celém $\mathbb{R}^d$

$$\Box_c u \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,, \tag{11.5}$$

$$u|_{t=0} = g_0\,, \tag{11.6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g_1\,. \tag{11.7}$$

• Elementární řešení (Greenova funkce, klademe formálně $f = 0$, $g_0 = 0$, $g_1 = \delta$):

$$\widehat{E}(\xi, t) = \frac{\sin(2\pi c|\xi| t)}{2\pi c|\xi|}\,, \quad \text{tvar } E \text{ je obecně různý v prostorech různé dimenze (viz Tabulka 1).}$$

• Řešení na celém prostoru v libovolné dimenzi je pak obecně definováno takto:

$$u(x, t) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\Big(E \underset{x}{\star} g_0\Big)}_{:=u_0} + \underbrace{(E \underset{x}{\star} g_1)}_{:=u_1} + \underbrace{\Big(c^2\, H(t)\, E \underset{x,t}{\star} f\Big)}_{:=u_f}\,.$$

[1] Existuje více Fourierových transformací, které se liší konstantami před integrálem a v exponenciálním integračním jádru. Všechny jsou typu $\widehat{f}(\xi) = A^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{kix\cdot\xi}\, dx$ s inverzí $\check{f}(x) = B^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\, e^{-kix\cdot\xi}\, d\xi$, kde $2\pi AB = |k|$. Fourierovy transformace konkrétních objektů (funkcí, distribucí) se podle volby konstant A, B mohou „v konstantách“ lišit.

[2] Symbolem $\star_x$ značíme konvoluci podle proměnné x a $H(t)$ je Heavisideova funkce (tj. charakteristická funkce intervalu $\langle 0, +\infty)$).

Dimenze	Elementární řešení	Data	Odpovídající řešení
d=1:*)	$E(x,t) = \frac{1}{2c}\chi_{\langle -ct,ct\rangle}(x)$	g_0	$u_0 = \frac{1}{2}\Big(g_0(x-ct) + g_0(x+ct)\Big)$
		g_1	$u_1 = \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g_1(y)\,dy$
		f	$u_f = \frac{c}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau$
d=2:	$E(x,t) = \frac{1}{2\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2t^2-x^2}}\right)_+$	g_0	$u_0 = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\lvert y\rvert\le ct} \frac{g_0(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-y^2}}\,dy$
		g_1	$u_1 = \frac{1}{2\pi c}\int\limits_{\lvert y\rvert\le ct} \frac{g_1(x-y)}{\sqrt{c^2t^2-y^2}}\,dy$
		f	$u_f = \frac{c}{2\pi}\int\limits_0^t \int\limits_{\lvert y\rvert\le c\tau} \frac{f(x-y,t-\tau)}{\sqrt{c^2\tau^2-y^2}}\,dy\,d\tau$
d=3:	$E = \frac{1}{4\pi c^2 t}\nu_{ct}$	g_0	$u_0 = \frac{1}{4\pi ct}\int\limits_{S_{ct}(0)} \Big(\frac{g_0}{ct} + \frac{\partial g_0}{\partial n}\Big)(x-y)\,dS(y)$
		g_1	$u_1 = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{S_{ct}(0)} g_1(x-y)\,dS(y)$
		f	$u_f = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f\Big(x-y, t-\frac{\lvert y\rvert}{c}\Big)}{\lvert y\rvert}\,dy$

Tabulka 1: Řešení vlnové rovnice na celém prostoru

... symbol $(\dots)_+$ znamená, že daná funkce je (pře)definovaná nulou tam, kde by nebyla definovaná, nebo tam, kde by byla záporná.

... ν_{ct} je takzvaná plošná distribuce, definovaná předpisem $\big(\nu_r,\varphi\big) := \int\limits_{S_r(0)} \varphi(x)\,dS(x)$ pro všechny nekonečně hladké funkce φ s kompaktním nosičem.

---

*) ... tj. například v jedné dimenzi ($d = 1$) je řešení úlohy (11.5)–(11.7) toto:

$$u(x,t) = \frac{g_0(x-ct) + g_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g_1(y)\,dy + \frac{c}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau\,.$$

Srovnejte to s cvičením 5 z 1.11.2007 (vzorec (5.9)), kde jsme tento tzv. d'Alembertův vzorec odvodili jiným způsobem, za omezení $f \equiv 0$.