Gauss-Greenovy-Ostrogradského formule v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

Následující vztahy se vyznačují tím, že dávají do souvislosti integrál přes **oblast plné dimenze** Ω s integrálem přes **její hranici** $\partial\Omega$. V uvedených vztazích předpokládáme:

- Je-li Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^3$, je její hranice $\partial\Omega$ zobecněná 2-plocha, a symbol ds označuje plošný integrál prvního druhu přes plochu $\partial\Omega$;
- Je-li Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^2$, je její hranice $\partial\Omega$ po částech hladká jednoduchá křivka, orientovaná tak, že při pohybu po $\partial\Omega$ leží oblast Ω po levé ruce, symbol ds pak označuje křivkový integrál prvního druhu přes křivku $\partial\Omega$;
- ve skoro všech bodech $\partial\Omega$ existuje jednotkový vektor vnější normály $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ resp. $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$;
- všechny integrované (skalární či vektorové) funkce jsou (pro jednoduchost) spojité spolu se všemi potřebnými derivacemi na $\overline{\Omega}$.

1. Základní věta:

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x_k}\,dx = \int_{\partial\Omega} F\nu_k\,ds\,, \qquad k = 1, 2\,(, 3)} \tag{1}$$

Gauss-Green-Ostrogradský

2. Odvozené vztahy:

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div}\vec{T}\,dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T}\cdot\vec{\nu}\,ds\,,} \tag{2}$$

Věta o divergenci

$$\boxed{\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx = \int_{\partial\Omega} u\,v\,\nu_k\,ds - \int_\Omega v\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx} \tag{3}$$

Per partes po složkách

$$\boxed{\int_\Omega u\,\nabla v\,dx = \int_{\partial\Omega} u\,v\,\vec{\nu}\,ds - \int_\Omega v\,\nabla u\,dx} \tag{4}$$

Per partes vektorově

$$\boxed{\int_\Omega \nabla u\,\nabla v\,dx = \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\,ds - \int_\Omega v\,\Delta u\,dx} \tag{5}$$

1. Greenova formule

… kde $\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}} = \nabla u\cdot\vec{\nu}$ je derivace ve směru normálového vektoru

$$\boxed{\int_\Omega \big(u\,\Delta v - v\,\Delta u\big)\,dx = \int_{\partial\Omega}\Big(u\,\frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}} - v\,\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\Big)\,ds} \tag{6}$$

2. Greenova formule

3. Další důsledky:

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\vec{\nu}}\,ds} \tag{7}$$

$$\boxed{\int_{\partial\Omega}\vec{\nu}\,ds = 0} \tag{8}$$

4. Poznámka ke vzorci (1)**:**
Jako základní ze všech uváděných vztahů jsem si vybral vzorec (1) především pro jeho analogii se známým (jednodimenzionálním) Newton-Leibnizovým vztahem

$$\int_a^b F'\,dx = F(b) - F(a)\,. \tag{$*$}$$

Pro jednoduchost předpokládáme například F, $F' \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$. Potom Ω ve vztahu (1) hraje roli intervalu (a, b) v $(*)$, jehož „hranicí“ jsou dva body a a b. Hodnoty v hraničních bodech $F(b)$ a $F(a)$ na pravé straně vztahu $(*)$ jsou násobeny hodnotami 1 a -1, které se dají chápat jako hodnoty „vnější normály k intervalu (a, b) ve směru osy x“ v bodech a a b.

5. Z (1) **plynou všechny ostatní vztahy** (2)–(8) **:**

- Vztah (2) plyne z (1): dosaďte $F := T_k$ v (1) a sečtěte přes k.
- Vztah (3) plyne z (1): dosaďte $F := uv$ v (1) a proderivujte součin na levé straně.
- Vztah (4) je jen vektorovým zápisem vztahu (3).
- Vztah (5) plyne z (3): místo u dosaďte $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ a takto vzniklé rovnosti sečtěte přes k.
- Vztah (6) plyne z (5): napište si vztah (5′), který vznikne z (5) tím, že prohodíte roli u a v. Potom odečtěte (5′) a (5).
- Vztah (7): položte $v = 1$ v (5).
- Vztah (8): položte $u = v = 1$ v (4).

Stokesova věta v $\mathbb{R}^3$

Do souvislosti jsou dávány dva integrály přes objekty **neplné dimenze** (to je hlavní rozdíl proti předchozímu případu). Tj. jde o situaci „křivá plocha s okrajem“.

Věta (Stokes). *Nechť $S = (S, \vec{\nu})$ je orientovaná jednoduchá 2-plocha v $\mathbb{R}^3$, nechť její hranice $\partial S \equiv \langle\varphi\rangle$ je obrazem jednoduché, uzavřené, po částech hladké křivky φ. Nechť dále φ obíhá S v* **kladném** *směru (tj. orientace tečného vektoru k φ a orientace plochy ν vyhovují pravidlu pravé ruky). Nechť konečně $T_k, \dfrac{\partial T_k}{\partial x_j} \in \mathcal{C}(\overline{S})$. Potom*

$$\boxed{\int_S \operatorname{rot}\vec{T}\cdot\vec{\nu}\,dS = \int_\varphi T_1\,dx + T_2\,dy + T_3\,dz}$$

nebo zapsáno jinak

$$\boxed{\int_{(S,\nu)} \operatorname{rot}\vec{T}\,d\vec{S} = \int_\varphi \vec{T}d\vec{\varphi}}$$

Je-li S obíhána opačně, liší se uvedené integrály o znaménko.

M. Rokyta, 26.2.1999