PÍSEMKA Z PDR I | 20.12.2007

PŘÍJMENÍ A JMÉNO:

ZÍSKANÉ BODY:

1.	2.	3.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. K výpočtům můžete použít výtisky „programů cvičení“ z webovské stránky cvičícího. Písemka nebude hodnocena známkou, pouze se bude hodnotit jako „napsaná“, pokud dosáhnete alespon 20 bodů z 33 možných.

---

1. [10b] Nalezněte řešení rovnice $4u_{xy} - u_{yy} + 4u_x - 8u_y - 7u = 0$ pro $u = u(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Řešte nejprve obecně a poté nalezněte všechna řešení, která splňují podmínku $u(x, 0) = 0$.

---

2. [11b]

   (a) Najděte řešení rovnice vedení tepla na polopřímce, tj. řešte rovnici

   $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad x > 0\,, \quad t > 0\,,$$

   které splňuje $\partial_x u(0, t) = 0$ pro $t > 0$, $u(x, 0) = x^k e^{-\alpha x^2}$ pro $x > 0$, kde $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Zdůvodněte, jak jste zacházeli s počáteční podmínkou $u(x, 0)$ pro $x < 0$ a proč.

   (c) Určete, pro jaké $t_1 > 0$ nabývá teplota v počátku své maximální hodnoty, tj. najděte $t_1 > 0$, že $u(0, t_1) = \max_{t \geq 0} u(0, t)$.

---

3. [12b] Najděte řešení rovnice vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ na omezeném intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, s okrajovými podmínkami $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$,

   (a) pro počáteční podmínku $u(x, 0) = \varphi(x) = x(\pi - x)$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$; proveďte celý výpočet metodou rozdělení proměnných, nemusíte dělat formální diskusi řešení;

   (b) pro počáteční podmínku $u(x, 0) = \varphi(x) = \sin^3 x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$; (Nápověda: uvědomte si, že Fourierova řada funkce $\sin^3 x$ nemá příliš mnoho členů)

   (c) Bonus: učiňte odhad chování řešení u z bodu (b) v závislosti na čase, tj. nalezněte odhad typu $|u(x, t)| \leq f(t)$.
