Písemka z PDR I $\boxed{20.12.2007}$

ŘEŠENÍ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. V výpočtům můžete použít výtisky „programů cvičení“ z webovské stránky cvičícího. Písemka nebude hodnocena známkou, pouze se bude hodnotit jako „napsaná“, pokud dosáhnete alespon 20 bodů z 33 možných.

---

1. [10b] Nalezněte řešení rovnice $4u_{xy} - u_{yy} + 4u_x - 8u_y - 7u = 0$ pro $u = u(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Řešte nejprve obecně a poté nalezněte všechna řešení, která splňují podmínku $u(x,0) = 0$.

Protože je $4^2 - 4 \cdot 0 \cdot (-1) = 16 > 0$, je rovnice hyperbolická, tedy půjde převést vhodnými substitucemi až na tvar

$$v_{\xi\xi} - \beta^2 v_{\eta\eta} = \gamma v\,,$$

kde o konstantě γ předem nevíme, jestli bude nebo nebude nenulová.

Substituce $\xi = x + y$, $\eta = x - 2y$ (jedna z možných, které odstraní smíšený člen ve druhých derivacích) vede na rovnici

$$3u_{\xi\xi} - 12u_{\eta\eta} - 4u_\xi + 20u_\eta - 7u = 0\,,$$

a zavedení nové funkce v předpisem $u = v \cdot e^{\frac{2}{3}\xi + \frac{5}{6}\eta}$ vede k

$$v_{\xi\xi} - 4v_{\eta\eta} = 0\,.$$

Jde tedy o případ, který půjde vyřešit explicite: řešením výše uvedené rovnice je (např. podle d'Alembertova vzorce)

$$v(\xi,\eta) = f(\eta + 2\xi) + g(\eta - 2\xi),$$

kde f a g jsou libovolné dostatečně hladké funkce. Po provedení zpětných substitucí ($\eta + 2\xi = 3x$, $\eta - 2\xi = x + 4y$, $\frac{2}{3}\xi + \frac{5}{6}\eta = \frac{3}{2}x - y$) dostaneme obecné řešení původní úlohy ve tvaru

$$u(x,y) = e^{\frac{3}{2}x - y}\left(f(x) + g(x + 4y)\right)\,.$$

Podmínka $u(x,0) = 0$ dává pak $0 = u(x,0) = e^{\frac{3}{2}x}\left(f(x) + g(x)\right)$, odkud $g(x) = -f(x)$, a tedy všechan řešení, která splňují danou okrajovou podmínku, mají tvar

$$u(x,y) = e^{\frac{3}{2}x - y}\left(f(x) - f(x + 4y)\right)\,,$$

pro dostatečně hladkou libovolnou funkci f.

2. [11b]

(a) Najděte řešení rovnice vedení tepla na polopřímce, tj. řešte rovnici
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad x > 0\,, \quad t > 0\,,$$
které splňuje $\partial_x u(0,t) = 0$ pro $t > 0$, $u(x,0) = x^k e^{-\alpha x^2}$ pro $x > 0$, kde $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

(b) Zdůvodněte, jak jste zacházeli s počáteční podmínkou $u(x,0)$ pro $x < 0$ a proč.

(c) Určete, pro jaké $t_1 > 0$ nabývá teplota v počátku své maximální hodnoty, tj. najděte $t_1 > 0$, že $u(0,t_1) = \max_{t\geq 0} u(0,t)$.

---

b) Počáteční podmínku rozšíříme sudě na celé $\mathbb{R}$, $g(x) = |x|^k\, e^{-\alpha x^2}$. Z teorie víme, že takovéto sudé rozšíření způsobí, že $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$ pro všechna $t > 0$. Obecně to lze nahlédnout takto: řešení rovnice vedení tepla s počáteční podmínkou g a nulovou pravou stranou, je dáno vzorcem
$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, G(x-y,t)\, dy\,, \quad \text{kde} \quad G(x-y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} \tag{1}$$
Pokud je tedy možno proderivovat podle parametru x (v našm případě to lze – rozmyslete si), máme
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, \frac{\partial G}{\partial x}(-y,t)\, dy = 0\,, \tag{2}$$
protože $\frac{\partial G}{\partial x}(-y,t)$ je lichá v y pro všechna $t > 0$, a integrál vyjde nula díky tomu, že g je sudá (přesněji: sudě rozšířená).

a) Řešení naší úlohy je tedy podle (1)
$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^k\, e^{-\alpha y^2}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\, dy\,, \tag{3}$$
integrál je možno jistě ještě trochu upravit, to ale uděláme až v dalším kroku.

a) Podle (3) je
$$u(0,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |y|^k\, e^{-\alpha y^2}\, e^{-\frac{y^2}{4t}}\, dy \overset{\text{sudost}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} y^k\, e^{-y^2\left(\alpha + \frac{1}{4t}\right)}\, dy =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}\,\left(\alpha + \frac{1}{4t}\right)^{\frac{k+1}{2}}}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{2^k\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\underbrace{\frac{t^k}{(1+4\alpha t)^{k+1}}}_{=:g(t)}}\,,$$
s využitím znalosti $2\int_0^\infty z^k\, e^{-\beta z^2}\, dz \overset{[s=\beta z^2]}{=} \frac{1}{\beta^{\frac{k+1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{k-1}{2}}\, e^{-s}\, ds = \frac{1}{\beta^{\frac{k+1}{2}}}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$.

O průběhu $u(0,t)$ rozhoduje průběh funkce $g(t)$, spočteme tedy
$$g'(t) = \frac{t^k k}{t\,(1+4\,\alpha\, t)^{k+1}} - 4\, \frac{t^k\, (k+1)\, \alpha}{(1+4\,\alpha\, t)^{k+1}\, (1+4\,\alpha\, t)} = \frac{t^{k-1}}{(1+4\,\alpha\, t)^{k+1}}\, (k - 4\alpha t)\,,$$
funkce g tedy roste pro $t \in (0, k/4\alpha)$ a klesá pro $t \in (k/4\alpha, \infty)$, nabývá tedy maxima v bodě $t_1 = \frac{k}{4\alpha}$, ve stejném bodě nabude svého maxima i funkce $u(0,t)$.

3. [12b] Najděte řešení rovnice vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ na omezeném intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, s okrajovými podmínkami $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,

(a) pro počáteční podmínku $u(x,0) = \varphi(x) = x(\pi - x)$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$; proveďte celý výpočet metodou rozdělení proměnných, nemusíte dělat formální diskusi řešení;

(b) pro počáteční podmínku $u(x,0) = \varphi(x) = \sin^3 x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$; (Nápověda: uvědomte si, že Fourierova řada funkce $\sin^3 x$ nemá příliš mnoho členů)

(c) Bonus: učiňte odhad chování řešení u z bodu (b) v závislosti na čase, tj. nalezněte odhad typu $|u(x,t)| \le f(t)$.

Fourierova metoda separace nás vede k ansatzu $u(x,t) = X(x)\,T(t)$, což po dosazení do rovnice dává[1] $X\,\dot{T} - X''\,T = 0$, neboli

$$\frac{X''}{X} = \frac{\dot{T}}{T} = \lambda\,, \tag{4}$$

kde λ je konstanta. Okrajové podmínky úlohy určují okrajové podmínky pro X ve tvaru $X(0) = X(\pi) = 0$, rovnice pro X je z (4) rovna $X'' - \lambda X = 0$. Jediná netriviální (tj. neidenticky nulová) řešení této úlohy jsou pro $\lambda = -n^2$ (jinak řečeno, toto jsou vlastní čísla okrajové úlohy pro X), odpovídající řešení jsou $X_n = a_n \sin nx$.

Rovnice pro T se zmíněnými λ je $\dot{T} = -n^2 T$ s obecným řešením $T_n = b_n e^{-n^2 t}$. První část výpočtu je tedy možno ukončit konstatováním, že ansatz pro řešení ve tvaru nekonečné řady je

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-n^2 t}\, \sin nx\,. \tag{5}$$

a) Počáteční podmínka $u(x,0) = \varphi(x) = x(\pi - x)$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ ukazuje, že konstanty c_n v (5) splňují $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\,\sin nx\,dx$. Spočteme

$$\int_0^\pi x(\pi-x)\,\sin nx\,dx \overset{\text{per p.}}{=} \underbrace{\Big[-\frac{1}{n}x(\pi-x)\,\cos nx\Big]_0^\pi}_{=0} + \frac{1}{n}\int_0^\pi (\pi-2x)\,\cos nx\,dx =$$

$$\overset{\text{per p.}}{=} \underbrace{\Big[\frac{1}{n^2}(\pi-2x)\,\sin nx\Big]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{2}{n^3}\big(1-(-1)^n\big)\,,$$

odkud

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\,e^{-n^2 t}\,\sin nx = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}\,e^{-(2k+1)^2 t}\,. \tag{6}$$

Toto je formálně získané řešení, proto by nyní ještě správně musela následovat diskuse, zda vztahem (6) je skutečně definováno řešení našeho problému.

[1] Tečkou značíme derivaci podle t, čárkou derivaci podle x.

b) Podobně jako v předchozím případě jsou koeficienty c_n v (5) rovny Fourierovým koeficientům sinového rozvoje funkce $\sin^3 x$. Platí však[2]

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \tag{7}$$

a tedy $c_1 = \frac{3}{4}$, $c_3 = -\frac{1}{4}$ a všechny ostatní koeficienty c_n jsou nulové. Proto je

$$u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-9t}\sin 3x\,. \tag{8}$$

Protože jde o řešení ve tvaru součtu konečné řady, je diskuse o kvalitě její konvergence triviální a vztah (8) skutečně definuje řešení (můžete se přesvědčit dosazením).

c) Zároveň je z (8) vidět

$$\max_x |u(x,t)| \le \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-9t} \le ce^{-t}\,, \tag{9}$$

teplota tedy v tomto případě klesá pro $t \to \infty$ k nule exponencielně.

[2] Například z Moivrovy věty $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$ plyne

$$\sin 3x = \mathrm{Im}\,(\cos x + i\sin x)^3 = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

odkud plyne (7).