Písemka z PDR I $\boxed{11.1.2008}$

Příjmení a jméno:

	1.	2.	Σ
Získané body:			

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. K výpočtům můžete použít výtisky „programů cvičení“ z webovské stránky cvičícího. Písemka nebude hodnocena známkou, pouze se bude hodnotit jako „napsaná“, pokud dosáhnete alespon 12 bodů z 25 možných.

---

1. [10b] Metodou charakteristik nalezněte řešení rovnice

$$yu_x - xu_y = y^2 - x^2 \,,$$

které splňuje podmínku $u(x,0) = x^2$.

Budeme řešit pomocnou úlohu

$$yz_x - xz_y + (y^2 - x^2)z_u = 0 \,, \quad z = z(x,y,u) \,, \tag{1}$$

s podmínkou $z(x,0,u) = u - x^2$. Charakteristiky této úlohy mají rovnice

$$\dot{x} = y \,, \tag{2}$$
$$\dot{y} = -x \,, \tag{3}$$
$$\dot{u} = y^2 - x^2 \,, \tag{4}$$

kde tečkou označujeme derivaci podle parametru charakteristiky. Charakteristiku (= křivku ve třech dimenzích) lze samozřejmě vyjádřit parametricky, také ji však lze vyjádřit jako průnik dvou dvourozměrných ploch:

(i) Porovnáte-li pravé strany (2) a (3) s pravou stranou (4), možná vás napadne vynásobit (2) ypsilonem, (3) iksem, a obě rovnice sečíst. Dostanete

$$\dot{u} = \dot{x}y + x\dot{y} = (xy)^{\cdot} \quad \Longrightarrow \quad (u - xy)^{\cdot} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u - xy = \text{konst.} \,,$$

což je rovnice jedné ze dvou ploch, jejichž průsečíkem je charakteristika.

(ii) Podobně vydělením rovnic (2) a (3) dostaneme $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{y}{x}$, odkud

$$0 = \dot{x}x + \dot{y}y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{\cdot} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = \text{konst.} \,,$$

a máme druhou z ploch.

Výhodu tohoto postupu ilustruje následující úvaha: víme, že řešení $z = z(x,y,u)$ úlohy (1) je funkce, která je konstatní na charakteristice. Charakteristiku charakterizují dva výrazy z (i) a (ii), které jsou na ní konstantní. Je tedy libovolná funkce, konstantní na charakteristice, tvaru

$$z(x,y,u) = f(u - xy, x^2 + y^2) \,, \tag{5}$$

kde f je libovolná dostatečně hladká funkce (přesvědčte se dosazením, že tato funkce je obecným řešením rovnice (1)). Protože však má platit okrajová podmínka $z(x,0,u) = u - x^2$, dostáváme z (5)

$$u - x^2 = z(x,0,u) = f(u, x^2)\,, \tag{6}$$

a tedy nutně $f(A,B) = A - B$. Proto je řešením problému (1) včetně počáteční podmínky funkce

$$z(x,y,u) = f(u - xy, x^2 + y^2) = u - xy - x^2 - y^2\,. \tag{7}$$

Víme, že pomocná úloha (1) (s pomocnou okrajovou podmínkou $z(x,0,u) = u - x^2$) je tu od toho, aby se z rovnosti $z(x,y,u) = 0$ na závěr vypočítala hledaná funkce u jako implicitní funkce proměnných x a y. Proto

$$u = xy + x^2 + y^2\,. \tag{8}$$

---

2. [15b] Řešte Laplace-Poissonovu rovnici $\Delta u = 2$ v obdélníku $(0,a) \times (-b/2, b/2)$, je-li u na hranici
   (a) identicky nulové
   (b) rovno funkci $x - y + xy$.

(a) Funkci u budeme hledat ve tvaru

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin\frac{n\pi}{a}x\,. \tag{9}$$

Funkce v tomto tvaru automaticky splňuje okrajové podmínky na svislých stranách obdélníka (tj. pro x=0 a x=π), zatímco její nulovost na vodorovných stranách (pro $y = -\frac{b}{2}$ a $y = \frac{b}{2}$) zajistí podmínky

$$c_n(-\tfrac{b}{2}) = c_n(\tfrac{b}{2}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \tag{10}$$

kladené na zatím neznámé funkce $c_n(y)$. Zbývá tedy rovnice $\Delta u = 2$. Za předpokladu, že řadu (9) je možno derivovat člen po členu, dostáváme

$$\Delta u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y) \right) \sin\frac{n\pi}{a}x = 2\,. \tag{11}$$

Rozvineme tedy funkci $f = 2$ do sinové Fourierovy řady pro $x \in (0,a)$, a porovnáme koeficienty v rozvojích v (11). Rozvinout $f = 2$ do Fourierovy řady v sinech znamená ji rozšířit liše[1] pro $x \in (-a, 0)$. Pak

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi}{a}x\,, \tag{12}$$

[1] Jednou z chyb, kterých jste se dopustili v písemce, bylo tvrzení, že „2“ už je samo o sobě Fourierovým rozvojem funkce $f = 2$, že to je „konstatní člen“ rozvoje. To je pravda, pokud bychom hledali rozvoj takové funkce do kosinové řady, tedy do řady sudých funkcí, neboť konstanta je sudá funkce. Protože však hledáme rozvoj do sinové řady (abychom mohli porovnat koeficienty v (11)), rozšiřujeme $f = 2$ liše pro $x \in (-a, 0)$, tedy hodnotou -2 na tomto intervalu. Takové rozšíření už však není konstanta a nemůže tedy být konstantním členem rozvoje, i kdyby daný Fourierův rozvoj konstantní člen měl.

kde

$$f_n = \frac{2}{a}\int_0^a 2\sin\frac{n\pi}{a}x = \frac{4}{n\pi}\Big(1-(-1)^n\Big) = \begin{cases} 0 & n \text{ sudé,} \\ \frac{8}{n\pi} & n \text{ liché.} \end{cases} \tag{13}$$

Dosazením (12) do (11) a porovnáním koeficientů u $\sin\frac{n\pi}{a}x$ dostaneme (spolu s uvážením okrajových podmínek (10)) pro neznámou funkci $c_n(y)$ úlohu

$$c_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(y) = f_n\,, \tag{14}$$

$$c_n(-\tfrac{b}{2}) = c_n(\tfrac{b}{2}) = 0\,. \tag{15}$$

Jde o okrajovou úlohu pro lineární obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Postup jejího řešení je obecně tento: nalezneme fundamentální systém (řešení homogenní rovnice, tj. rovnice s nulovou pravou stranou), tj. tzv. obecné řešení; dále pokud je pravá strana nenulová, nalezneme jedno partikulární řešení (variací konstant nebo uhodnutím tvaru partikulárního řešení - ansatzem) a přičteme jej k fundamentálnímu systému; a konečně nalezením volných konstant v obecném řešení se pokusíme splnit okrajové podmínky.

$\boxed{\text{Je-li } n \text{ sudé,}}$ je ovšem $f_n = 0$, řešíme tedy pouze homogenní rovnici, jejíž řešení je (například metodou charakteristického polynomu)

$$c_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}\,, \tag{16}$$

a není těžké se přesvědčit o tom, že jediná funkce tvaru (16), která splňuje okrajové podmínky (15), je identická nula. Tedy: n sudé $\implies c_n(y) \equiv 0$.

$\boxed{\text{Je-li } n \text{ liché,}}$ je $f_n = \frac{8}{n\pi}$. Řešení homogenní rovnice je pochopitelně tvaru (16), a jedno partikulární řešení (pro konstantní pravou stranu) je konstanta[2] K_n. Dosazením $c_{n,\text{partik.}}(y) := K_n$ do (14) dostaneme $K_n = -\frac{8a^2}{n^3\pi^3}$, tedy

$$c_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}y} - \frac{8a^2}{n^3\pi^3}\,. \tag{17}$$

je obecné řešení rovnice (14). Zbývá splnit (15). Dostaneme rovnice

$$a_n e^{\frac{n\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} + b_n e^{-\frac{n\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} - \frac{8a^2}{n^3\pi^3} = 0\,,$$
$$a_n e^{-\frac{n\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} + b_n e^{\frac{n\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} - \frac{8a^2}{n^3\pi^3} = 0\,.$$

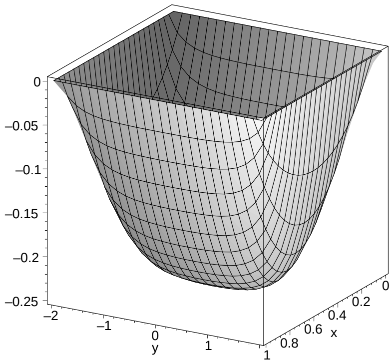
Symetrie v těchto rovnicích nás vede k závěru, že $a_n = b_n$, odkud pak už jednoduše dostaneme $a_n = b_n = \frac{8a^2}{n^3\pi^3}\cdot\frac{1}{2\cosh\frac{n\pi b}{2a}}$ (což ale není těžké spočíst i rutinně), a tedy

$$n = 2k-1 = \text{liché} \quad\implies\quad c_n(y) = \frac{8a^2}{n^3\pi^3}\left(\frac{\cosh\frac{n\pi y}{a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}} - 1\right)\,. \tag{18}$$

Nakonec dosadíme takto spočtená $c_n(y)$ do (9) a získáme řešení úlohy (a) ve tvaru

$$u(x,y) = \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\left(\frac{\cosh\frac{(2k-1)\,\pi y}{a}}{\cosh\frac{(2k-1)\,\pi b}{2a}} - 1\right)\sin\frac{(2k-1)\pi}{a}x\,. \tag{19}$$

[2] Není nutno dělat variaci konstant, když umíme partikulární řešení uhodnout na základě speciálního tvaru pravé strany.



Graf funkce (19) pro $a = 1$, $b = 4$.

(b) Z linearity úlohy je zřejmé, že stačí najít řešení úlohy

$$\Delta v = 0\,, \qquad \text{v obdélníku } (0,a)\times(-b/2,b/2)\,, \tag{20}$$

$$v = x - y + xy\,, \qquad \text{na hranici obdélníka } (0,a)\times(-b/2,b/2)\,, \tag{21}$$

a sečíst toto řešení s řešením úlohy (a), tj. s funkcí (19). Je však na první pohled jasné,[3] že funkce $v(x,y) = x - y + xy$ je řešením úlohy (20)–(21).

Poznámka.

Všimněte si grafu řešení úlohy (a). Vidíte, že Laplaceova rovnice s pravou stranou nesplňuje klasický princip maxima – nenabývá obou svých extremálních hodnot (maxima, minima) na hranici. Přesto však můžeme něco říci – zopakujte si slabý zobecněný princip maxima a minima, napovím: jde o situaci, kdy $Lu = 2 > 0$.

[3] Pokud si toho, že okrajová podmínka je harmonická, přímo nevšimnete, máte pro tuto situaci ve vašich tahácích postup: od okrajové podmínky, která nemá v rozích obdélníka nulovou hodnotu, odečteme (harmonickou) funkci tvaru $c(x,y) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy$, tak, abychom v rozích obdélníka tyto nulové hodnoty dostali. Samozřejmě vyjde $c(x,y) = x - y + xy$ a její odečtení ($w := v - c$) způsobí, že okrajová podmínka pro w bude nulová na celé hranici obdélníka. Máme tedy vyřešit úlohu $\Delta w = 0$ uvnitř obdélníka a $w = 0$ na hranici, jejímž jediným řešením je identická nula. Pak ovšem $v(x,y) = w(x,y) + c(x,y) = 0 + x - y + xy = x - y + xy$.