Proseminář z kalkulu 1a

1. Metody důkazů, nerovnosti, zobrazení, logika

1. (Bernoulli) Nechť $x \in \mathbf{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbf{N}$. Pak platí Bernoulliova nerovnost

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dokažte indukcí. Indukcí typu „$n \to n{+}2$“ dále ukažte, že uvedená nerovnost platí i pro $x \geq -2$. Ukažte na příkladě, že pro $x < -2$ a obecné $n \in \mathbf{N}$ již Bernoulliova nerovnost neplatí.

Dodatek* (zobecněná Bernoulliho nerovnost) Ukažte: Nechť $n \in \mathbf{N}$. Platí-li pro všechna $k \in 1, 2, \ldots, n$ buď $x_k \geq 0$ nebo $0 \geq x_k \geq -2$, je

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_n\,.$$

2. (Cauchy) Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla. Potom platí

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

3. (AG nerovnost) Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

Ukažte, že rovnost v AG nerovnosti platí právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Ukažte, že pro kladná reálná čísla $a_1, \ldots, a_n$ platí tzv. AGH nerovnost

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$$

přičemž i zde rovnosti platí právě tehdy, když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

4. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Dokažte následující rovnosti.

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
- $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

5. Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$ a množiny $A \subset X$, $B \subset X$. Ukažte, že následující vztahy obecně neplatí.

- $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
- $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

6. Ukažte, že bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroků a, b, c jsou následující výroky vždy pravdivé.

- $a \ \&\ (b \ \&\ c) \Leftrightarrow (a \ \&\ b) \ \&\ c$,
- $a \ \&\ (b \vee c) \Leftrightarrow (a \ \&\ b) \vee (a \ \&\ c)$,
- $a \vee (b \ \&\ c) \Leftrightarrow (a \vee b) \ \&\ (a \vee c)$,
- $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$,
- $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \ \&\ \neg b)$.