Proseminář z kalkulu 1a

2. Vlastnosti reálných čísel, mohutnost množin

1. Odvoďte z definice reálných čísel.

- $\forall x \in \mathbf{R}: \; x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,
- $\forall x \in \mathbf{R}: \; -x = (-1) \cdot x$,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; (x > 0 \;\&\; y > 0) \Rightarrow xy > 0$,
- $\forall x, y \in \mathbf{R} \, \forall n \in \mathbf{N}: \; 0 \leq x < y \Rightarrow x^n < y^n$.

2. Nechť $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$. Pak platí

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

3. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální. Obecně: Pro $n \in \mathbf{N}$ je číslo $\sqrt{n}$ buď celé nebo již iracionální.

4. Nechť množiny A_n, $n \in \mathbf{N}$, jsou spočetné. Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná.

5. Ukažte, že množina $\mathbf{Q}$ je spočetná.

6. Nechť množiny A, B jsou spočetné. Pak $A \times B$ je spočetná.

7. Každá nekonečná podmnožina spočetné množiny má stejnou mohutnost jako $\mathbf{N}$.

8. Množina všech zobrazení z $\mathbf{N}$ do $\{0, 1\}$ je nespočetná.

9. (vlastnosti subvalence) Pro libovolné množiny A, B, C platí:

- $(A \preceq B \;\&\; B \preceq C) \Rightarrow A \preceq C$,
- $A \preceq A$,
- $(A \preceq B \;\&\; B \preceq A) \Rightarrow A \approx B$ (bez důkazu).

(vlastnosti ekvivalence mohutnosti množin) Pro libovolné množiny A, B, C platí:

- $A \approx A$ (reflexivita),
- $A \approx B \Rightarrow B \approx A$ (symetrie),
- $(A \approx B \;\&\; B \approx C) \Rightarrow A \approx C$ (tranzitivita).

10. Poznámka o nespočetnosti $\mathbf{R}$.

11. Transcendentních čísel je nespočetně mnoho.

12. Nechť A je množina. Pak platí $A \prec \mathcal{P}(A)$, kde $\mathcal{P}(A)$ značí *potenci* A, tj. množinu všech podmnožin množiny A.