Proseminář z kalkulu 1a

3. Posloupnosti reálných čísel

1. Ukažte, že pro všechna a, $b \in \mathbf{R}$ platí

$$\Big| |a| - |b| \Big| \le |a - b| \,.$$

2. Ukažte, že pro všechna a, $b \in \mathbf{R}$ platí

$$a = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0 : \quad |a - b| < \varepsilon \,.$$

3. Buď $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$, $a \ge 0$. Buď $\{a_n\}$ posloupnost nezáporných reálných čísel. Ukažte (z definice limity), že platí:

$$\lim a_n = a \qquad \Longrightarrow \qquad \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a} \,.$$

4. Ukažte „lemma o jednom strážníku v nekonečnu“: Buďte $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ posloupnosti reálných čísel, $a_n \le b_n$. Potom

$$\lim a_n = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim b_n = +\infty \,,$$

$$\lim b_n = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim a_n = -\infty \,.$$

5. Zvolme $a_1 \in (0, 2)$ a definujme posloupnost a_n rekurentním vztahem $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbf{N}$. Ukažte:

- a_n je neklesající posloupnost,
- $\forall n \in \mathbf{N} : \quad a_n \le 2$.
- S využitím znalosti, že každá monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost má vlastní limitu ukažte, že $\lim a_n = 2$.

6. Definujme posloupnosti

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n , \quad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Ukažte:

- $\forall n \in \mathbf{N} : \quad a_n < b_n$,
- a_n je rostoucí posloupnost, b_n je klesající posloupnost,
- a_n je omezená shora, b_n je omezená zdola,
- $\lim(b_n - a_n) = 0$.

S využitím znalosti, že každá monotónní a (z příslušné strany) omezená posloupnost má vlastní limitu ukažte, že

- existují vlastní $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a vlastní $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ a rovnají se;
- označíme-li tuto společnou limitu e, ukažte s využitím vlastností a_n a b_n, že $2 < \mathrm{e} < 3$.

7. Ukažte, že pro posloupnost kladných čísel a_n platí:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = A < 1 \implies \lim a_n = 0\,, \qquad \lim \sqrt[n]{a_n} = B > 1 \implies \lim a_n = +\infty\,,$$
$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A < 1 \implies \lim a_n = 0\,, \qquad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = B > 1 \implies \lim a_n = +\infty\,.$$

Spočtěte limity

$$\lim \frac{n^k}{a^n}\,, \quad \lim \frac{a^n}{n!}\,, \quad \lim \frac{n!}{n^n}\,,$$

kde $k \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$.

8. Ukažte, že pro posloupnost kladných čísel a_n platí:

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

Odvoďte z toho, že platí:

$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbf{R} \qquad \implies \qquad \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = A\,.$$

Ukažte na příkladu, že tuto implikaci nelze obrátit. Spočtěte s využitím této implikace $\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}}}$.

9. a) Dokažte *Stolzovu větu*: Nechť a_n, b_n jsou posloupnosti reálných čísel, takové, že

- b_n je rostoucí, $\lim b_n = +\infty$,
- existuje $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A \in \mathbf{R}$.

Potom existuje $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$.

b) Ukažte na příkladech, že Stolzovu větu nelze obrátit.

c) Ukažte, že nelze vynechat předpoklad neomezenosti posloupnosti $\{b_n\}$.

d) Spočtěte

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \qquad \lim \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}\,, \;\; k \in \mathbf{N}\,.$$

10. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a definujme $b_n := \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$. Potom platí: existuje-li $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$, existuje i $\lim b_n = A$. Dokažte. Ukažte, že může existovat $\lim b_n$ a nemusí existovat $\lim a_n$.

11. Buď $a \in \mathbf{R}$ iracionální číslo. Ukažte, že množinou hromadných bodů posloupnosti $\{na - [na]\}_{n=1}^{\infty}$ (kde $[x]$ značí celou část čísla x) je celý uzavřený interval $\langle 0, 1\rangle$.

12.* Ukažte, že množinou hromadných bodů posloupnosti $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ je celý uzavřený interval $\langle -1, 1\rangle$.