Proseminář z kalkulu 1a

4. Číselné řady s nezápornými členy

1. Seznamte se zněním (resp. osvěžte si znění) následujících (zjednodušených) kritérií konvergence číselných řad s nezápornými členy:

Věta (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*
(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta (d'Alembertovo podílové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*
(ii) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

2. Rozhodněte, zda jsou následující řady konvergentní nebo divergentní:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbf{R},\ x > 0 \text{ pevné}),$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad (d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{2^n}, \qquad (e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3},$$

$$(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+7)!}{7^n\, n!}, \qquad (g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}.$$

3. Seznamte se zněním (resp. osvěžte si znění) následujících (zjednodušených) kritérií konvergence číselných řad s nezápornými členy:

Věta (srovnávací kritérium). *Nechť* $n_0 \in \mathbf{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \le a_n \le b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \ge n_0$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*
(ii) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Věta (limitní srovnávací kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim a_n/b_n \in (0, \infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

4. Rozhodněte, zda jsou následující řady konvergentní nebo divergentní.

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt[4]{n^3}}{1+\sqrt[3]{n^5}}, \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{n^{10}} + \sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}} + \sqrt[11]{n^9}},$$

$$(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n},$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3-n-1}}{n},$$

$$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}, \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n + 5^n}.$$

5. Seznamte se zněním (resp. osvěžte si znění) následujícího kritéria konvergence číselných řad s nezápornými členy (případně naznačte důkaz):

Věta (Raabeovo kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*
(i) *Je-li* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*
(ii) *Je-li* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

6. Rozhodněte, zda jsou následující řady konvergentní nebo divergentní:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \quad (k \geq 2\,,\ k \in \mathbf{N})\,,$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\cdots(2+\sqrt{n})}\,, \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\,(n!)^2}{(2\,n+1)!}\,,$$

$$(d) \quad \frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \cdots \qquad \text{pro } a, b, d > 0.$$

Návody a výsledky:

2. (a) konverguje (podílové kr.), (b) konverguje $\forall x \in \mathbf{R}$ (podílové kr.), (c) konverguje (podílové kr.), (d) konverguje (podílové nebo odmocninové kr.), (e) diverguje (podílové nebo odmocninové kr.), (f) konverguje (podílové kr.), (g) konverguje (podílové kr.), (h) konverguje (podílové kr.).

4. (a) diverguje (limitní srovnávací kr.), (b) diverguje (limitní srovnávací kr.), (c) diverguje (limitní srovnávací kr.), (d) konverguje (limitní srovnávací kr.), (e) konverguje (srovnávací kr., odhadněte čitatele shora), (f) konverguje (srovnávací kr., odhadněte jmenovatele zdola).

6. (a) konverguje (Raabeovo kr.), (b) konverguje (Raabeovo kr.), (c) diverguje (Raabeovo kr.), (d) konverguje pro $b > a+d$ a diverguje pro $b < a+d$ (Raabeovo kr.), diverguje pro $b = a+d$ (limitní srovnávací kr.).