Proseminář z kalkulu 1a

5. Funkce jedné reálné proměnné, limita a spojitost

1. Ukažte, že existuje:

(a) Funkce $g : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ taková, že $g(I) = \langle 0,1\rangle$ pro libovolný interval $I \subset \langle 0,1\rangle$. Může taková funkce být v nějakém bodě spojitá?

(b) Funkce $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taková, že $f(I) = \mathbf{R}$ pro libovolný interval $I \subset \mathbf{R}$.

2. Dirichletova a Riemannova funkce.

(a) Dirichletova funkce D je definována na $\mathbf{R}$ takto: $D(x) = 1$ pro $x \in \mathbf{Q}$, $D(x) = 0$ pro $x \notin \mathbf{Q}$. Ukažte, že v žádném bodě $x \in \mathbf{R}$ neexistuje limita $D(x)$ (ani jednostranná). (Dirichletova funkce je tedy nespojitá ve všech $x \in \mathbf{R}$, a má neodstranitelnou nespojitost 2. druhu ve všech $x \in \mathbf{R}$.)

(b) Určete, v kterých bodech mají limitu funkce $x \mapsto x \cdot D(x)$, $x \mapsto (x^2 - 1) \cdot D(x)$.

(c) Riemannova funkce funkce R je definována na $\mathbf{R}$ takto: $R(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $R(x) = 1/q$ pokud $x \in \mathbf{Q}$, $x = p/q$, kde $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ jsou nesoudělná čísla. Ukažte, že $\lim_{x\to c} R(x) = 0$ pro všechna $c \in \mathbf{R}$. Riemannova funkce je tedy spojitá ve všech iracionálních bodech a ve všech racionálních bodech má bod odstranitelné nespojitosti. (Co vznikne, odstraníte-li všechny nespojitosti Riemannovy funkce předefinováním hodnotou limity v daných bodech?)

3. S využitím znalosti, že funkce f, monotónní na $(c-\delta, c)$, má limitu $\lim_{x\to c-} f(x)$ (a podobně pro limitu zprava), ukažte, že množina všech bodů nespojitosti monotónní funkce je nejvýše spočetná. Rozmyslete si také, že všechny nespojitosti monotónní funkce jsou neodstranitelné nespojitosti 1. druhu, tj. nespojitosti typu „skok“.

4. Jaké dodatečné podmínky na funkce f a g je potřeba klást, aby platila věta o limitě složené funkce v různých „jednostranných“ verzích? Diskutujte například tyto možnosti:

(a) $\lim\limits_{x\to c+} g(x) = D \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{y\to D-} f(y) = A \in \mathbf{R}$ & $\ldots \implies \lim\limits_{x\to c+} f(g(x)) = A$.

(b) $\lim\limits_{x\to c-} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{y\to +\infty} f(y) = A \in \mathbf{R}$ & $\ldots \implies \lim\limits_{x\to c-} f(g(x)) = A$.

5. Nechť existuje $\delta^* > 0$ takové, že funkce f je definována alespoň na $\mathcal{P}^{\delta^*}(c)$. Definujme limes inferior (lim inf) a limes superior (lim sup) funkce f v bodě c takto:

$$\liminf_{x\to c} f(x) := \sup_{\delta\in(0,\delta^*)} \inf \{f(x) : x \in P(c,\delta)\},$$
$$\limsup_{x\to c} f(x) := \inf_{\delta\in(0,\delta^*)} \sup \{f(x) : x \in P(c,\delta)\}.$$

(a) Ukažte, že limita $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ existuje právě tehdy, když existují $\liminf\limits_{x\to c} f(x)$ a $\limsup\limits_{x\to c} f(x)$ a rovnají se.

(b) Ukažte, že platí[1]

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \inf \{f(x) : x \in P(c,\delta)\},$$
$$\limsup_{x\to c} f(x) = \lim_{\delta\to 0+} \sup \{f(x) : x \in P(c,\delta)\}.$$

(c) Spočtěte $\liminf_{x\to c} f(x)$ a $\liminf_{x\to c} f(x)$ pro Dirichletovu resp. Riemannovu funkci v různých bodech $c \in \mathbf{R}$.

---

[1] Jako bonus si lze rozmyslet i následující rovnosti:

$$\liminf_{x\to c} f(x) = \inf \{y \in \mathbf{R}^* : \text{ existuje posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \neq c,\ \lim x_n = c,\ y = \lim f(x_n)\},$$
$$\limsup_{x\to c} f(x) = \sup \{y \in \mathbf{R}^* : \text{ existuje posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \neq c,\ \lim x_n = c,\ y = \lim f(x_n)\}.$$

6. Řekneme, že funkce f má na intervalu J Darbouxovu vlastnost, pokud pro všechna x, $y \in \boldsymbol{f}(J)$, $x < y$, a pro všechna $z \in \mathbf{R}$, $x < z < y$ existuje $\xi \in J$, že $f(\xi) = z$. Klasická věta reálné analýzy říká, že každá spojitá funkce na uzavřeném intervalu má Darbouxovu vlastnost. Ukažte, že funkce $f(x) := \sin \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, 1\rangle$, $f(0) := 0$ je nespojitá na $\langle 0, 1\rangle$ a přitom má Darbouxovu vlastnost.

7. Zkonstruujte tzv. *Cantorovo diskontinuum* $\mathcal{C}$ a ukažte:

(a) Celková délka všech intervalů, které se při konstrukci Cantorova discontinua odstraní z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, je 1.

(b) Množina všech bodů, patřících do Cantorova diskontinua $\mathcal{C}$, je nespočetná.

(c) Nechť $\mathcal{C} = \langle 0, 1\rangle \setminus \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$, kde (a_j, b_j) jsou všechny intervaly, odstraněné při konstrukci $\mathcal{C}$. Uvažujte funkci $g(x) := 2\frac{x-a_j}{b_j-a_j} - 1$, pro $x \in (a_j, b_j)$ a $g(x) := 0$, $x \in \mathcal{C}$. Ukažte, že tato funkce je nespojitá v nespočetně mnoha bodech intervalu $\langle 0, 1\rangle$, přesto má na něm Darbouxovu vlastnost.

8. Existuje funkce, která není spojitá v žádném bodě intervalu J a přitom má na něm Darbouxovu vlastnost?

9. Buď $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ taková, že pro všechna $a > 0$ platí $\lim_{n\to\infty} f(an) = 0$. Existuje potom $\lim_{x\to\infty} f(x)$?