Proseminář z kalkulu 1a

6. Hyperbolické funkce a funkce k nim inverzní (bonusové téma)

1. Definujte tzv. hyperbolické funkce (hyperbolický sinus, kosinus, tangens a kotangens):

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,,$$
$$\operatorname{tgh} x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \qquad \operatorname{cotgh} x := \frac{1}{\operatorname{tgh} x} = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,,$$

a ukažte:

(a) $D(\sinh) = \mathbf{R}$, sinh je na celém definičním oboru spojitá lichá a rostoucí, zobrazuje $\mathbf{R}$ prostě na $\mathbf{R}$, a pro její derivaci platí:

$$(\sinh x)' = \cosh x\,, \qquad x \in \mathbf{R};$$

(b) $D(\cosh) = \mathbf{R}$, cosh je na celém definičním oboru spojitá a sudá, která zobrazuje $\mathbf{R}$ na $\langle 1, +\infty)$, přičemž je klesající na $(-\infty, 1\rangle$ a rostoucí na $\langle 1, +\infty)$, a pro její derivaci platí:

$$(\cosh x)' = \sinh x\,, \qquad x \in \mathbf{R};$$

(c) $D(\operatorname{tgh}) = \mathbf{R}$, tgh je na celém definičním oboru spojitá lichá a rostoucí, zobrazuje $\mathbf{R}$ prostě na $(-1, 1)$, a pro její derivaci platí:

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}\,, \qquad x \in \mathbf{R};$$

(d) $D(\operatorname{cotgh}) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, cotgh je na celém definičním oboru spojitá a lichá, zobrazuje $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ prostě na $\mathbf{R} \setminus \langle -1, 1\rangle$, přičemž je klesající na $(-\infty, 0)$ a klesající na $(0, +\infty)$ (nikoli však klesající na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, a pro její derivaci platí:

$$(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{1}{\sinh^2 x}\,, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

2. Definujte inverzní hyperbolické (tzv. hyperbolometrické) funkce:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arg\,sinh} &:= (\sinh)^{-1}\,,\\
\operatorname{arg\,cosh} &:= \Big(\cosh|_{\langle 0,+\infty)}\Big)^{-1}\,,\\
\operatorname{arg\,tgh} &:= (\operatorname{tgh})^{-1}\,,\\
\operatorname{arg\,cotgh} &:= (\operatorname{cotgh})^{-1}\,,
\end{aligned}$$

a ukažte, že jsou to spojité bijekce mezi uvedenými dvojicemi množin:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{arg\,sinh} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,,\\
&\operatorname{arg\,cosh} : \langle 1, +\infty) \to \langle 0, +\infty)\,,\\
&\operatorname{arg\,tgh} : (-1, 1) \to \mathbf{R}\,,\\
&\operatorname{arg\,cotgh} : \mathbf{R} \setminus \langle -1, 1\rangle \to \mathbf{R} \setminus \{0\}\,.
\end{aligned}$$

Studujte monotonii uvedených funkcí.

3. Ukažte některé ze základních vztahů pro hyperbolické funkce:

$$
\begin{aligned}
e^x &= \cosh x + \sinh x \\[2em]
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\[2em]
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\[2em]
\sinh^2 \frac{x}{2} &= \frac{\cosh x - 1}{2} \\
\cosh^2 \frac{x}{2} &= \frac{\cosh x + 1}{2} \\[2em]
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\sinh(x-y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y \\[2em]
\sinh x + \sinh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\
\sinh x - \sinh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2} \\
\cosh x + \cosh y &= 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2} \\
\cosh x - \cosh y &= 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

Porovnejte tyto vztahy se vztahy pro goniometrické funkce!

4. Ukažte, že platí:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arg}\sinh x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1})\,, && x \in \mathbf{R}\,, \\
\operatorname{arg}\cosh x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1})\,, && x \in \mathbf{R}\,, \\
\operatorname{arg}\operatorname{tgh} x &= \ln \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}\,, && x \in (-1,1)\,, \\
\operatorname{arg}\operatorname{cotgh} x &= \ln \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}\,, && x \in \mathbf{R} \setminus \langle -1,1 \rangle\,.
\end{aligned}
$$