

# Proseminář z kalkulu 1a

## 7. Derivace

1. Spočtete z definice (pokud existují) derivace následujících funkcí:

- (a)  $x \sin \frac{1}{x}$  v bodě  $x = 0$ ,  $x^2 \sin \frac{1}{x}$  v bodě  $x = 0$ ;
- (b)  $x D(x)$  v bodě  $x = 0$ ,  $x^2 D(x)$  v bodě  $x = 0$ , kde  $D(x)$  je Dirichletova funkce;

2. (a) Víme (bylo na přednášce), že pokud existují vlastní derivace  $f'(a)$  a  $g'(a)$ , existuje i vlastní derivace  $(fg)'(a)$  a platí

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Zformulujte a dokažte tvrzení, která připouštějí situaci, že by některá z  $f'(a)$ ,  $g'(a)$  (případně obě) byla nevlastní. Jak je potřeba modifikovat předpoklady příslušného tvrzení?

(b) Víme (opět z přednášky), že pokud existují vlastní derivace  $f'(a)$  a  $g'(a)$  a navíc pokud  $g(a) \neq 0$ , existuje i vlastní derivace  $(f/g)'(a)$  a platí

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Zformulujte a dokažte tvrzení, která připouštějí situaci, že by některá z  $f'(a)$ ,  $g'(a)$  (případně obě) byla nevlastní. Jak je potřeba modifikovat předpoklady příslušného tvrzení?

3. (a) Víte-li, že  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ,  $x > 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , spočtete pomocí věty o derivaci inverzní funkce  $(x^{1/n})'$ .

(b) Na přednášce byla dokázána věta o derivaci inverzní funkce ve vnitřních bodech otevřeného intervalu. Nechť tedy nyní  $f$  je ryze monotónní na  $\langle a, b \rangle$  a má jednostranné derivace v  $a$  zprava (resp. v  $b$  zleva). Zformulujte a dokažte větu o (jednostranných) derivacích inverzní funkce  $f^{-1}$  v bodech  $f(a)$ ,  $f(b)$  (z příslušné strany). Spočtete poté derivace (resp. jednostranné derivace) funkce arcsin ve všech bodech jejího definičního oboru.

4. Nechť existuje derivace  $f'(x) \in \mathbf{R}$  pro všechna  $x \in (a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Potom funkce  $f'$  má Darbouxovu vlastnost.