Opakování středoškolské látky

1. Řešte následující nerovnice v $\mathbf{R}$:
$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0, \qquad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

2. Nakreslete graf funkce: $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

3. Dokažte následující formulky:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

4. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

5. Dokažte pro $a, b \in \mathbf{R}$: $|a+b| \leq |a|+|b|, \qquad ||a|-|b|| \leq |a-b|$.

6. (i) Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $n \leq 2^n$. Dokažte!
(ii) Pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

7. Řešte rovnice:
$$\sin 2x = \sin x, \quad 2\sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2+1) = 2\log(3-x).$$

8. Sečtěte: $\sin x + \cdots + \sin nx$.

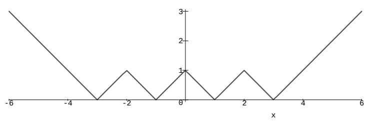
9. Sečtěte:
$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

10. Dokažte, že pro $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$, platí:
$$(n+1)^n \leq n^{n+1}.$$

Výsledky a návody

1. $(4,6)$; $\langle 1,2\rangle$; $(-6,-3) \cup \left((-1-\sqrt{13})/2, (-1+\sqrt{13})/2\right)$

2.



3. Použijte matematickou indukci.

4. Použijeme-li Moivreovu větu nebo součtové vzorce dostaneme:
$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x,$$
$$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x.$$

5. První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první.

6. Použijte matematickou indukci.

7. 1. rovnice: $x = k\pi$ nebo $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ nebo $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 2. rovnice: $x = 2k\pi$ nebo $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbf{Z}$; 3. rovnice: $4/3$

8. Vhodným použitím Moivreovy věty a vzorce pro součet geometrické řady dostaneme:
$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin(x/2)} \qquad \text{pro } x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$
Pokud $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pak je součet roven nule.

9. Použijte binomickou větu na výrazy $(1+1)^{2n}$ a $(1-1)^{2n}$. Výsledek: 2^{2n-1}.

10. Použijte matematickou indukci nebo aplikujte binomickou větu na $(n+1)^n$ a pak odhadněte členy binomického rozvoje.