Kvantifikátory, zobrazení, supremum a infimum

1. Nechť M značí množinu všech mužů a Z značí množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové funkce:

$$\begin{aligned} S(m,z) &: \text{„Muž } m \text{ je manželem ženy } z.\text{“} \\ L_1(m,z) &: \text{„Muž } m \text{ miluje ženu } z.\text{“} \\ L_2(m,z) &: \text{„Žena } z \text{ miluje muže } m.\text{“} \end{aligned}$$

Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem $L_1,\ L_2$ a S vyjádřete následující tvrzení:

(1) Každý ženatý muž miluje svou manželku.
(2) Každou ženu miluje nějaký muž.
(3) Existují nevěrné manželky.

2. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

- $\forall x \in \mathbf{N}\ \exists y \in \mathbf{N}\ \forall z \in \mathbf{N}:\ (z > x \Rightarrow y < z)$,
- $\forall a \in \mathbf{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R}:\ (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)$,
- $\exists a \in \mathbf{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{R}:\ (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1)$.

3. Charakterizujte zobrazení $f : M \to L$, pro která platí

- $\forall A \subset M : f^{-1}(f(A)) = A$,
- $\forall B \subset L : f(f^{-1}(B)) = B$.

4. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):

- $A = \{p/(p+q);\ p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N}\}$,
- $B = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi \rangle\}$,
- $C = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbf{N},\ m \in \mathbf{N}\}$,
- $D = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbf{N}\}$,
- $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Výsledky a návody

1.1. $\forall m \in M\ \forall z \in Z:\ S(m,z) \Rightarrow L_1(m,z)$

1.2. $\forall z \in Z\ \exists m \in M:\ L_1(m,z)$

1.3.

$$\begin{aligned} &\exists z_1, z_2 \in Z\ \exists m_1, m_2, m_3, m_4 \in M:\ z_1 \neq z_2\ \&\ m_1 \neq m_2 \\ &\qquad \&\ m_3 \neq m_4\ \&\ S(m_1,z_1)\ \&\ L_2(m_2,z_1)\ \&\ S(m_3,z_2)\ \&\ L_2(m_4,z_2) \end{aligned}$$

2. 1. a 2. tvrzení platí, 3. tvrzení neplatí.

4. $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, $\inf B = -1$, $\sup B = 1$, $\inf C$ neexistuje v $\mathbf{R}$, $\sup C$ neexistuje v $\mathbf{R}$, $\inf D = 0$, $\sup D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\inf E = 0$, $\sup E$ neexistuje v $\mathbf{R}$.