

Limita posloupnosti

1. Vypočtete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7}.$$

2. Spočtete limity následujících posloupností:

$$\left\{ \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\}, \quad \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right\}, \quad \left\{ \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} \right\}.$$

3. Vypočtete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 4^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}.$$

4. Vypočtete: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$ pro $a > b > 0$.

5. Spočtete limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n}},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt[3]{n^3+n}}.$$

6. Spočtete

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}.$$

7. Spočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}.$$

8. Spočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}).$$

9*. Spočtete:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right),$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right).$$

Výsledky a některé postupy

1. 0, 2, 2

2. $-1/2, 1/3, 1/4$

3.1-4. 0, 4, 0, 0

3.5. Víme, že pro $k \in \mathbf{N}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^k} = +\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : n^2 \leq n^3 \leq n^4 \leq 2^n \leq 3^n \leq 4^n.$$

Platí tedy

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : 4 \leq \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} \leq 4\sqrt[n]{6}.$$

Víme, že platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} = 1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n} = 4.$$

3.6. $2/3$

4. $1/a$

5.1.-4. 0, 0, 0, 1

5.5. Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[3]{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + n}} \\ &= \frac{(n^3 + n)^{\frac{1}{3}} - (n^3 + 1)^{\frac{1}{3}}}{(n^3 + 2n)^{\frac{1}{3}} - (n^3 + n)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(n^3 + n)^{\frac{2}{3}} + (n^3 + n)^{\frac{1}{3}}(n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + (n^3 + 1)^{\frac{2}{3}}}{(n^3 + 2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3 + 2n)^{\frac{1}{3}}(n^3 + n)^{\frac{1}{3}} + (n^3 + n)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{(n^3 + 2n)^{\frac{2}{3}} + (n^3 + 2n)^{\frac{1}{3}}(n^3 + n)^{\frac{1}{3}} + (n^3 + n)^{\frac{2}{3}}}{(n^3 + n)^{\frac{2}{3}} + (n^3 + n)^{\frac{1}{3}}(n^3 + 1)^{\frac{1}{3}} + (n^3 + 1)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{n - 1}{n} \cdot \frac{(1 + \frac{2}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1 + \frac{2}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}} + (1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}}}{(1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{2}{3}} + (1 + \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}} + (1 + \frac{1}{n^3})^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Odtud již vyplývá, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[3]{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + n}} = 1$.

6.1. Limita neexistuje.

6.2. Spočítejme nejprve tuto limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}.$$

Platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{1 + \sqrt{\frac{\sqrt[n]{n}}{n^6}}} = 1.$$

Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^3 \sqrt[2n]{2n}}{(2n)^3 + \sqrt[4n]{2n}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 \sqrt[2n+1]{2n+1}}{(2n+1)^3 + \sqrt[4n+2]{2n+1}} = -1.$$

To znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$ neexistuje.

7. Platí:

$$\begin{aligned} (n+4)^{100} - (n+3)^{100} &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} 4^j - \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} 3^j \\ &= \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} (4^j - 3^j) = 100n^{99} + P_1(n); \\ (n+2)^{100} - n^{100} &= 200n^{99} + P_2(n), \end{aligned}$$

kde P_1, P_2 jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_1(n)}{n^{99}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_2(n)}{n^{99}} = 0.$$

Dostáváme tak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100 + \frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200 + \frac{P_2(n)}{n^{99}}} = 1/2.$$

8. Platí

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) \cdot \frac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n^4+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}}. \end{aligned}$$

Víme, že platí:

- (1) $\forall n \in \mathbf{N} : |\sin(n+1)| \leq 1$,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Z (1) a (2) plyne $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n+1)}{n^2} = 0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n+1)) \cdot (\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4+1}) = \frac{1}{2}.$$

9. 3, 1/2