

Konvergence řad

1. Zjistěte, zda konvergují (divergují) řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{2n^2 + 5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}.$$

2. Zjistěte, zda následující řady konvergují:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[4]{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n}.$$

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n^2}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{2^n - 2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{(2n^2 + 5)^2}. \end{aligned}$$

4. Určete pro která $z \in \mathbf{R}$ následující řady konvergují:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

Výsledky

1. Diverguje, diverguje, konverguje, konverguje.

2. Konverguje, diverguje, konverguje.

3.1. Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n!}{2n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n!}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2^{2n+1}} = 0 < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

3.2. Pro každé $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$ platí $2^n > 2n$, a proto jsou všechny členy uvažované řady jsou kladné. Můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{3}{2^n - 2n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{2^{n+1} - 2(n+1)}}{\frac{3}{2^n - 2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

3.3. Pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $n \leq 2^n \leq 3^n$, a proto má uvažovaná řada pouze kladné členy. Zkusme použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1} + (-1)^{n+1}(n+1)}{3^{n+1} + (-1)^{n+1}(n+1)}}{\frac{2^n + (-1)^n n}{3^n + (-1)^n n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \left(\frac{1+(-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}}} \right)}{\frac{2^n}{3^n} \left(\frac{1+(-1)^n \frac{n}{2^n}}{1+(-1)^n \frac{n}{3^n}} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+(-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}}}{1+(-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}}} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Užili jsme následujících faktů:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, kde $a > 1$, $k \in \mathbf{N}$;
- (2) posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.

Z (1) a (2) vyplývá:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n} &= 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2^{n+1}} &= 0, & \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{3^{n+1}} &= 0. \end{aligned}$$

Zbytek vyplývá z věty o aritmetice limit. Naše řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

3.4. Označme $a_n = \sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}$. Platí:

$$a_n > 0 \text{ pro každé } n \in \mathbf{N} \text{ a } a_n = \frac{2}{\sqrt{n^3 + 1} + \sqrt{n^3 - 1}} < \frac{2}{n^{3/2}}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}}$ konverguje, a proto podle srovnávacího kritéria konverguje i vyšetřovaná řada.

3.5. Všechny členy uvažované řady jsou kladné, můžeme proto zkusit použít podílové kritérium:

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 = \frac{1}{5} < 1.$$

Řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

3.6. Členy uvažované řady jsou kladné a použijeme-li podílové kritérium, dostaneme:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} + 4^{n+1}}{4^{n+1} + 5^{n+1}} \cdot \frac{4^n + 5^n}{3^n + 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{4^n} + 4}{\frac{4^{n+1}}{5^n} + 5} \cdot \frac{\frac{4^n}{5^n} + 1}{\frac{3^n}{4^n} + 1} = \frac{4}{5} < 1. \end{aligned}$$

Zkoumaná řada tedy konverguje podle podílového kritéria.

3.7. Zkoumaná řada je absolutně konvergentní, a tedy konvergentní.

4. $(-1, 1)$, \mathbf{R} , $\langle -1/2, 1/2 \rangle$, $(-3, 3)$, $(-1, 1)$, $\langle -1, 1 \rangle$, $\langle -1, 1 \rangle$.