Limita funkce

1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$$

2. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\quad (n\in\mathbf{N}),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

3. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0+}(e^x-1)^{\frac{(\operatorname{tg}x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2},\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x},$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\,2^x}{1+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}},\qquad \lim_{x\to\infty}\log(1+2^x)\log\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

5. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg}x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg}x}.$$

6. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n,\qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1),\qquad \lim_{x\to 0+}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

7. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x},\qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

8***.** Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Výsledky a některá řešení

1. 2, 1/2, -1

2. $-1/16$, 3/2, $1/n$, 1/4

3. 7/3, $-1/2$, 0

4. 0, $1/e$, 2/3, $\log 8$

5.1. Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Víme, že

(i) $\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1$,
(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
(iii) $\lim_{x\to 0}\sin x=0$,
(iv) sin je prostý na $\langle -\pi/2,\pi/2\rangle$,
(v) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}=1$.

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)=1\cdot 1\cdot 2=2.$$

5.2. Pišme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg} x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}.
\end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}-\frac{e^{\arcsin x}-1}{\arcsin x}\cdot\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

Použili jsme

- $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$,
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
- $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$,
- sin je prostá funkce na jistém okolí 0,
- arcsin je prostá funkce,
- $x\mapsto 2x$ je prostá funkce,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}=1.$$

5.3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - 2\sin(\pi/6 + x)}{x}\right)$$
$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)$$
$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x}\cdot\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)$$
$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right). \qquad (\star)$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$,
(3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$,
(4) $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$.

Z $(\star)$, (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

6.1. Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)^x$$
$$= \exp\left(\log\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)^x\right)\right)$$
$$= \exp\left(x\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + 1}}{2x^3 - 1}\right)$$
$$= \exp\left(\frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}}\cdot\frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2 - \frac{1}{x^3}}\right). \qquad (\star)$$

Dále platí:

- $\lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z} = 1$,
- $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+2x^3} + \sqrt{x^4+1}}{2x^3 - 1}$
  $= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2x - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$,
- funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3} - \sqrt{x^4+1}}$ je na jistém okolí ∞ různá od nuly,
- exp je spojitá na $\mathbf{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}} = 1. \qquad (\star\star)$$

Dále máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{1}{x^3}} = 1. \qquad (\star\star\star)$$

Z $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ a (4) plyne

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^4+2x^3}-\sqrt{x^4+1}}\right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n = e.$$

6.2. Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x)=x(2^{\frac{1}{x}}-1)$ v ∞. Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n\to\infty} f(n)=A$. Platí

$$\lim_{x\to\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{\log 2}{x}}-1}{\frac{\log 2}{x}}\cdot\log 2 = \log 2.$$

Užili jsme

- $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$,
- $\lim_{x\to\infty}\frac{\log 2}{x}=0$,
- $\frac{\log 2}{x}\neq 0$ pro každé $x>0$,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

6.3. 1.

7. $1/e$, $1/2$, $4/3$

8. 0