Derivace funkce

1. Nalezněte $A,\ B \in \mathbf{R}$, tak aby na $\mathbf{R}$ platil vztah

$$\left(A + x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x\right)\left(\log\left(1+x^2\right) - 1\right)\right)' \\ = (Ax+B)(\operatorname{arctg} x)\log(1+x^2).$$

2. Najděte $A \in \mathbf{R}$, aby na $(0,+\infty)$ platil vztah

$$\left(\log\left(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}\right) + \operatorname{arctg} x + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)' \\ = A\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

3. U následujících funkcí spočtěte derivace (i jednostranné, pokud neexistuje oboustranná):

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \qquad x^2\exp(-|x-1|), \qquad \frac{\sin x}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}.$$

4. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$$

$$f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\};$$

$$f(x) = \sqrt{1-e^{-x^2}};$$

$$f(x) = \arccos\frac{1}{1+x^2};$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases}$$

$$f(x) = x^{(x^x)}, \ \text{pro } x > 0;$$

$$f(x) = \max\{x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), x\}.$$

Výsledky

4.2. Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3\rangle + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi, \ k \ \in \mathbf{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3\rangle + 2k\pi, k \ \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\ \pi, \ k \ \in \mathbf{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi, \ k \ \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbf{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$f'_+(\pi/3+2k\pi) = \lim_{x\to\pi/3+2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3+2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \tag{1}$$

$$f'_-(\pi/3+2k\pi) = \lim_{x\to\pi/3+2k\pi-} 0 = 0, \tag{2}$$

$$f'_+(2\pi/3+2k\pi) = 0, \tag{3}$$

$$f'_-(2\pi/3+2k\pi) = -\sin(2\pi/3+2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \tag{4}$$

$$f'_+(4\pi/3+2k\pi) = -\sin(4\pi/3+2k\pi) = \sqrt{3}/2, \tag{5}$$

$$f'_-(4\pi/3+2k\pi) = 0, \tag{6}$$

$$f'_+(5\pi/3+2k\pi) = 0, \tag{7}$$

$$f'_-(5\pi/3+2k\pi) = -\sin(5\pi/3+2k\pi) = \sqrt{3}/2,\ \ k\ \in \mathbf{Z}. \tag{8}$$

4.3. Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1-e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

- $\lim_{y\to 0+}\frac{e^y-1}{y} = 1$,
- $\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$,
- $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\sqrt{\ }$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x\to 0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$.

4.4. Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbf{R}$ a je na $\mathbf{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2}, \tag{9}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{2\operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}. \tag{10}$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

4.5. Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

4.6. Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\left(1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\left(x^{(x^x)}\right)' = \left(e^{x^x\log x}\right)' = e^{x^x\log x}\left((x^x)'\cdot\log x + x^x\cdot\frac{1}{x}\right) \tag{11}$$

$$= x^{(x^x)}\left(x^x(\log x+1)\log x + x^{x-1}\right), \qquad x > 0. \tag{12}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

4.7. Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z},\\ x, & x \in \langle(2k+1)\pi, (2k+2)\pi\rangle,\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z},\\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi),\ k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbf{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$f'_+(2k\pi) = \lim_{x\to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi+}\left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = 5, \tag{13}$$

$$f'_-(2k\pi) = \lim_{x\to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x\to 2k\pi-} 1 = 1, \tag{14}$$

$$f'_-((2k+1)\pi) = \lim_{x\to (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi-}\left(1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\right) = -3, \tag{15}$$

$$f'_+((2k+1)\pi) = \lim_{x\to (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x\to (2k+1)\pi+} 1 = 1. \tag{16}$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, nemá derivaci.