1 Logika, reálná čísla a zobrazení

1.1 Výroková a predikátová logika

Výrokem nazveme jakékoliv tvrzení, o němž má smysl říci, že platí (je pravdivé) nebo že neplatí (je nepravdivé).

Definice. **Negací** $\neg A$ výroku A rozumíme výrok:

Není pravda, že platí A.

A	$\neg A$
0	1
1	0

Definice. **Konjunkcí** $A\&B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A i B.

Definice. **Disjunkcí** $A \vee B$ výroků A a B nazveme výrok:

Platí A nebo B.

Definice. **Implikací** $A \Rightarrow B$ nazýváme výrok:

Jestliže platí výrok A, potom platí výrok B.

Výroku A v implikaci se říká **premisa**, výrok B se nazývá **závěr**.

Pokud je výrok $A \Rightarrow B$ pravdivý, pak říkáme, že A je **postačující podmínkou** pro platnost B a B je **nutnou podmínkou** pro platnost A.

Definice. **Ekvivalencí** $A \Leftrightarrow B$ nazýváme výrok:

Výrok A platí tehdy a jen tehdy, když platí výrok B.

(Platnost výroku) A je **nutnou a postačující** podmínkou (platnosti výroku) B.

A	B	A & B	A $\vee$ B	A $\Rightarrow$ B	A $\Leftrightarrow$ B
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Výrokovou formou budeme nazývat výraz

$$A(x_1, x_2, \ldots x_m),$$

z něhož vznikne výrok dosazením prvků $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_m \in M_m$ z daných množin $M_1, \ldots, M_m$.

Definice. Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Pro všechna $x \in M$ platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\forall x \in M:\ A(x).$$

Symbol $\forall$ nazýváme **obecným (velkým) kvantifikátorem**.

Definice. Nyní nechť $A(x),\ x \in M$, je výroková forma. Výrok

Existuje $x \in M$, pro které platí $A(x)$.

zapisujeme ve tvaru:

$$\exists x \in M:\ A(x).$$

Symbol $\exists$ nazýváme **existenčním (malým) kvantifikátorem**.

1.2 Množiny a množinové operace

Definice.

- Řekneme, že množina A je **částí množiny** B (nebo A je **podmnožinou** B), jestliže každý prvek množiny A je rovněž prvkem množiny B. Tomuto vztahu říkáme **inkluze** a značíme $A \subset B$.
- Dvě množiny jsou si **rovny** ($A = B$), jestliže mají stejné prvky.
- **Prázdnou množinou** nazveme množinu, která neobsahuje žádný prvek. Označíme ji symbolem $\emptyset$.

Definice (množinové operace)**.** Nechť I je neprázdná množina a A_α je množina pro každé $\alpha \in I$.

- Definujeme **sjednocení** $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ jako množinu všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A_α.
- Definujeme **průnik** $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ jako množinu prvků, které náleží do každé z množin A_α.

Definice.

- Mají-li dvě množiny prázdný průnik, řekneme o nich, že jsou **disjunktní**.
- **Rozdílem množin** A a B (značíme $A \setminus B$) nazveme množinu prvků, které patří do množiny A a nepatří do množiny B.
- **Kartézským součinem** množin $A_1, \dots, A_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{[a_1, a_2, \dots, a_n];\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Věta 1.1 (de Morganova pravidla)**.** *Nechť I je neprázdná množina, X, A_α ($\alpha \in I$) jsou množiny. Pak platí*

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha),$$
$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha).$$

1.3 Zobrazení

Definice. Nechť A a B jsou množiny. Zobrazením z množiny A do množiny B rozumíme každé $F \subset A \times B$ splňující
$$\forall x \in A \; \exists! y \in B: \; [x, y] \in F.$$
Značíme $F : A \to B$.

Definice. Nechť A, B jsou neprázdné množiny a $f : A \to B$.

- **Obrazem** množiny $X \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina
$$f(X) = \{f(x); \; x \in X\}.$$
- Množina $f(A)$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)
- **Vzorem** množiny $Y \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; \; f(x) \in Y\}.$$

Definice. Nechť $A, \; B$ jsou množiny a $f : A \to B$.

- Zobrazení f je **prosté (injektivní)**, jestliže
$$\forall x_1, x_2 \in A: \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$
- Zobrazení f je **na** B **(surjektivní)**, jestliže $f(A) = B$.
- Řekneme, že f je bijekce A na B, jestliže f je prosté a na B.

Definice. Nechť $f : A \to B$ a $g : B \to C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$
Takto definované zobrazení se nazývá **složeným zobrazením** zobrazení f a g, přičemž f je **vnitřní zobrazení** a g je **vnější zobrazení.**

Definice. Nechť $f : A \to B$ je prosté. Pak zobrazení $f^{-1} : f(A) \to A$ definované předpisem $f^{-1}(y) = x$, kde $y \in f(A)$ a $f(x) = y$, nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

1.4 Mohutnost množin

Definice.

- Říkáme, že množiny A, B **mají stejnou mohutnost** a píšeme $A \approx B$, jestliže existuje bijekce A na B.
- Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny** B a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení A do B.
- Symbol $A \prec B$ značí situaci, kdy $A \preceq B$ a neplatí $A \approx B$.

Definice. Řekneme, že množina A je **spočetná**, jestliže platí $A \preceq \mathbf{N}$.

1.5 Reálná čísla

Množinu reálných čísel $\mathbf{R}$ lze popsat jako množinu, na níž jsou definovány operace **sčítání** a **násobení**, které budeme značit obvyklým způsobem, a relace **uspořádání** ($\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

III. Axiom suprema

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x + (y + z) = (x + y) + z$ (**asociativita sčítání**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x + y = y + x$ (**komutativita sčítání**),
- $\exists w \in \mathbf{R} \, \forall x \in \mathbf{R}: \; w + x = x$ (prvek w je určen jednoznačně, značíme ho 0 a říkáme mu **nulový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \, \exists z \in \mathbf{R}: \; x + z = 0$ (z je tzv. **opačné číslo** k číslu x, je určeno jednoznačně a značíme ho $-x$),
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (**asociativita násobení**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = y \cdot x$ (**komutativita násobení**),
- $\exists v \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \, \forall x \in \mathbf{R}: \; v \cdot x = x$ (prvek v je určen jednoznačně, značíme ho 1 a říkáme mu **jednotkový prvek**),
- $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \, \exists y \in \mathbf{R}: \; x \cdot y = 1$ (prvek y je určen jednoznačně a značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (**distributivita**).

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení

- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; (x \leq y \,\&\, y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (**tranzitivita**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; (x \leq y \,\&\, y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**slabá antisymetrie**),
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \; x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbf{R}: \; (0 \leq x \,\&\, 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Označení.

- Označení $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$. Symbolem $x < y$ budeme značit situaci, kdy $x \leq y$, ale $x \neq y$ (tzv. **ostrá nerovnost**).
- Reálná čísla, pro něž $x > 0$ (resp. $x < 0$), budeme nazývat **kladnými** (resp. **zápornými**).
- Reálná čísla, pro něž $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$), budeme nazývat **nezápornými** (resp. **nekladnými**).

Definice. • Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $a \in \mathbf{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$.

Takové číslo a se nazývá **dolní závorou** množiny M.

- Analogicky definujeme pojmy **množina omezená shora** a **horní závora**.
- Řekneme, že množina $M \subset \mathbf{R}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $G \in \mathbf{R}$ splňující

- $\forall x \in M: \ x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M: \ x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M.

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Má-li množina M supremum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej sup M.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že a je **největší prvek** (**maximum**) množiny M, jestliže $a \in M$ a a je horní závorou množiny M. Analogicky definujeme **nejmenší prvek** (**minimum**) M. Maximum a minimum jsou určeny jednoznačně (pokud existují) a značíme je $\max M$ a $\min M$.

III. Axiom suprema

- Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbf{R}$ má supremum.

Věta 1.2. *Existuje čtveřice $(\mathbf{R}, +, \cdot, \leq)$ splňující podmínky I–III, přičemž je těmito podmínkami určena jednoznačně v následujícím smyslu. Pokud čtveřice $(\tilde{\mathbf{R}}, \oplus, \odot, \leq^*)$ splňuje mutatis mutandis podmínky I–III, pak existuje bijekce $\varphi : \mathbf{R} \to \tilde{\mathbf{R}}$ taková, že pro každé $x, y \in \mathbf{R}$ platí*

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y)$,
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y)$,
- $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq^* \varphi(y)$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Číslo $g \in \mathbf{R}$ splňující

- $\forall x \in M: \ x \geq g$,
- $\forall g' \in \mathbf{R}, \ g' > g \, \exists x \in M: \ x < g'$,

nazýváme **infimem** množiny M.

Poznámka. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Má-li množina M infimum, je toto určeno jednoznačně a značíme jej inf M.

Věta 1.3. *Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje infimum množiny M.*

Věta 1.4. *Pro každé $r \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno číslo $k \in \mathbf{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$.*

Věta 1.5. *Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ splňující $x < n$.*

Věta 1.6. *Pro každé $n \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 0$, existuje právě jedno $y \in \mathbf{R}$, $y \geq 0$, splňující $y^n = x$.*

Věta 1.7. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Pak existuje $q \in \mathbf{Q}$ takové, že $a < q < b$.*

1.6 Komplexní čísla

Množinu komplexních čísel C definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž pro komplexní čísla $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ definujeme operace **sčítání** a **násobení** takto

- $x + y = (a + c, b + d)$,
- $x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$.

Nechť $x = (a, b) \in \mathbf{C}$.
Prvek a nazýváme **reálnou částí** x, prvek b nazýváme **imaginární částí** x.
Absolutní hodnotou komplexního čísla x rozumíme $\sqrt{a^2 + b^2}$.
Dále definujeme $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ (sic!) a $i = (0, 1)$.
Komplexně sdruženým číslem k x rozumíme číslo $\overline{x} = (a, -b)$; symbol $-x$ značí číslo $(-a, -b)$ a symbol $1/x$ značí pro $x \neq 0$ (jednoznačně určené) číslo splňující $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.