Matematická analýza 1a

2. Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice

Nechť A je neprázdná množina. Zobrazení přiřazující každému přirozenému číslu n prvek a_n z množiny A nazýváme **posloupnost prvků množiny** A. Prvek a_n nazveme n**-tým členem** této posloupnosti. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek.

2.1 Úvod

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.2 Konvergence posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A,

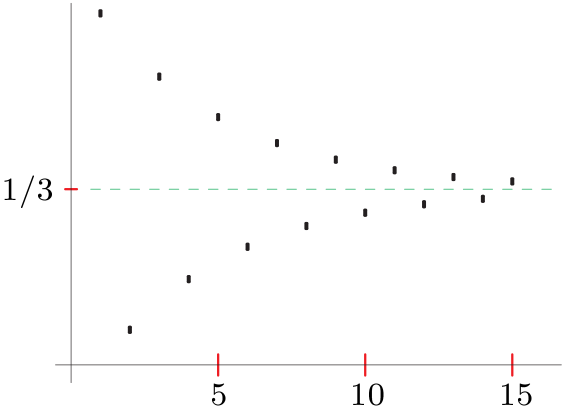
2.2 Konvergence posloupnosti

Definice

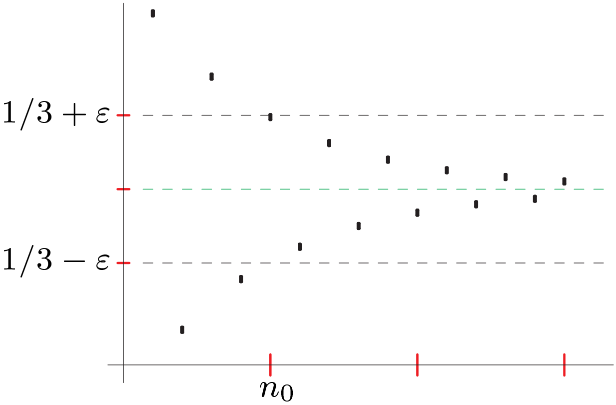
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

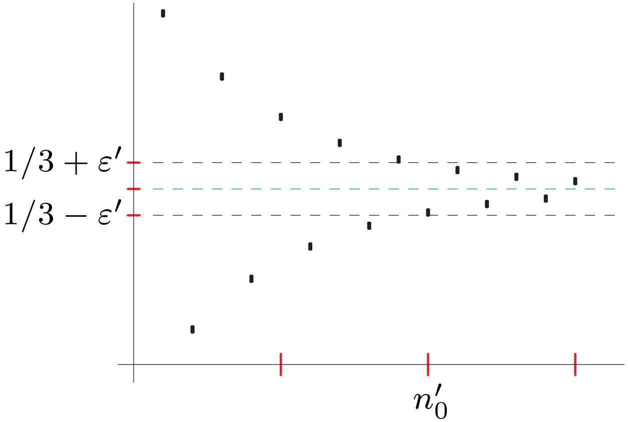
2.2 Konvergence posloupnosti



2.2 Konvergence posloupnosti



2.2 Konvergence posloupnosti



2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Definice

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Není-li posloupnost konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.2

Nechť $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, $A \in \mathbf{R}$. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ |a_n - A| < K\varepsilon,$$

potom $\lim a_n = A$.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.3

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.3

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$*, pak také* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$*.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B,$

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$*, pak také* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$*.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim\,(a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim\,(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$*, je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$*.*

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$*, pak také* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$*.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$*, je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$*.*

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$*. Jestliže platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$*, pak také* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$*.*

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$*, je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$*.*

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.4

Nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) *je-li* $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.6

Nechť $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.7

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$. *Potom* $\lim |a_n| = |A|$.

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

(ii) *Nechť* $A < B$*. Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$*.*

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

(ii) *Nechť* $A < B$*. Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$*.*

2.2 Konvergence posloupnosti

Věta 2.8 (limita a uspořádání)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$*.*

(i) *Nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$*. Potom* $A \geq B$*.*

(ii) *Nechť* $A < B$*. Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$*.*

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou dvě konvergentní posloupnosti a $\{c_n\}$ je posloupnost splňující:

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n,$

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n,$

(ii) $\lim a_n = \lim b_n.$

Věta 2.9 (o dvou strážnících)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq c_n \leq b_n,$

(ii) $\lim a_n = \lim b_n.$

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n.$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \geq L.$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \geq L .$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \; a_n \leq K .$$

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé)

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v $\mathbf{R}^\star$.

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*.*

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je pravá strana definována,*

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$*. Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n / b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Věta 2.12

Nechť $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0$, *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim a_n/b_n = \infty$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^\star$. Prvek $G \in \mathbf{R}^\star$ splňující

- $\forall x \in M : \; x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M : \; x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^\star$. Prvek $G \in \mathbf{R}^\star$ splňující

- $\forall x \in M: \; x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M: \; x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M. **Infimum** množiny M definujeme analogicky.

2.4 Věta o limitě monotónní posloupnosti

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

2.4 Věta o limitě monotónní posloupnosti

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

2.4 Věta o limitě monotónní posloupnosti

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N} : \ I_{n+1} \subset I_n,$

2.4 Věta o limitě monotónní posloupnosti

Věta 2.13

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)

Nechť $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N}: \; I_{n+1} \subset I_n,$
- $\lim_{n\to\infty}$ *délka* $I_n = 0.$

Potom $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ *je jednobodová množina.*

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbf{R}^\star$ nazýváme **hromadnou hodnotou** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbf{R}^\star$ nazýváme **hromadnou hodnotou** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.15 (Bolzano-Weierstassova věta)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.16

(i) *Nechť posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená. Potom* $+\infty \in H(\{a_n\})$.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.16

(i) *Nechť posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená. Potom* $+\infty \in H(\{a_n\})$.

(ii) *Nechť posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená. Potom* $-\infty \in H(\{a_n\})$.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.16

(i) *Nechť posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená. Potom* $+\infty \in H(\{a_n\})$.

(ii) *Nechť posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená. Potom* $-\infty \in H(\{a_n\})$.

Důsledek

Nechť $\{a_n\}$ *je posloupnost. Pak* $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Supremum množiny $H(\{a_n\})$ nazýváme **limes superior** a značíme $\limsup a_n$.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Supremum množiny $H(\{a_n\})$ nazýváme **limes superior** a značíme $\limsup a_n$. Infimum množiny $H(\{a_n\})$ nazýváme **limes inferior** a značíme $\liminf a_n$.

Věta 2.17

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Pak platí*

(i) $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$,

(ii) *jestliže* $x > \limsup a_n$, *pak existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0$, *platí* $a_n < x$.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.17

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Pak platí*

(i) $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$,

(ii) *jestliže* $x > \limsup a_n$, *pak existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$, *platí* $a_n < x$.

Navíc $\limsup a_n$ *je jediné číslo splňující (i) a (ii).*
Analogické tvrzení platí pro $\liminf a_n$.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Důsledek

Platí: $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ *a* $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Důsledek

Platí: $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ *a* $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$.

Věta 2.18

Platí: $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *právě tehdy, když*

$$\limsup a_n = \liminf a_n = A \in \mathbf{R}^\star.$$

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.19

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $n_0 \in \mathbf{N}$ *a platí* $a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. *Pak platí*

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \text{ a } \limsup a_n \leq \limsup b_n .$$

Věta 2.20

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje* ***Bolzano-Cauchyovu podmínku****, tj.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbf{N} \; \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \; \forall m \in \mathbf{N}, m \geq n_0 : \; |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Věta 2.21 (Borelova věta)

Nechť I je uzavřený interval a $\mathcal{S}$ je množina otevřených intervalů taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. Potom existuje konečná množina $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ taková, že $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.