2 Limita posloupnosti

2.1 Úvod

Definice. Nechť A je neprázdná množina. Zobrazení přiřazující každému přirozenému číslu n prvek a_n z množiny A nazýváme **posloupnost prvků množiny** A. Prvek a_n nazveme n**-tým členem** této posloupnosti. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **shora omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- **zdola omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- **omezená**, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- **neklesající**, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **rostoucí**, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **nerostoucí**, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$,
- **klesající**, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je **monotónní**, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je **ryze monotónní**, pokud je rostoucí či klesající.

2.2 Konvergence posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má **limitu** rovnou reálnému číslu A, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Věta 2.1 (jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Definice. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou číslu $A \in \mathbf{R}$, pak píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ nebo jenom $\lim a_n = A$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je **konvergentní**, pokud existuje $A \in \mathbf{R}$ takové, že $\lim a_n = A$. Není-li posloupnost konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Věta 2.2. *Nechť $K \in \mathbf{R}$, $K > 0$, $A \in \mathbf{R}$. Jestliže posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ |a_n - A| < K\varepsilon,$$

potom $\lim a_n = A$.

Věta 2.3. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá **vybranou posloupností z** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 2.4. *Nechť* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Jestliže platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, *pak také* $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Věta 2.5 (limita a aritmetické operace)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) je-li $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = A/B$.

Věta 2.6. *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Věta 2.7. *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$. *Potom* $\lim |a_n| = |A|$.

Věta 2.8 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}$.

(i) Nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $A \geq B$.

(ii) Nechť $A < B$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

Věta 2.9 (o dvou strážnících)**.** *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *je posloupnost splňující:*

(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$,

(ii) $\lim a_n = \lim b_n$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = \lim a_n$.

2.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže

$$\forall L \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ a_n \geq L.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$, jestliže

$$\forall K \in \mathbf{R}\, \exists n_0 \in \mathbf{N}\, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 :\ a_n \leq K.$$

Věta 2.10 (jednoznačnost limity podruhé)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu v* $\mathbf{R}^\star$.

Věta 2.11 (aritmetika limit podruhé)**.** *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *a* $\lim b_n = B \in \mathbf{R}^\star$. *Potom platí:*

(i) $\lim (a_n + b_n) = A + B$, *pokud je pravá strana definována,*

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, *pokud je pravá strana definována,*

(iii) $\lim a_n/b_n = A/B$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 2.12. *Nechť* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$, $A > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0$, *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim a_n/b_n = \infty$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^\star$. Prvek $G \in \mathbf{R}^\star$ splňující

- $\forall x \in M: \ x \leq G$,
- $\forall G' \in \mathbf{R}, G' < G \, \exists x \in M: \ x > G'$,

nazýváme **supremem** množiny M. **Infimum** množiny M definujeme analogicky.

2.4 Věta o limitě monotónní posloupnosti

Věta 2.13. *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Věta 2.14 (Cantorův princip vložených intervalů)**.** *Nechť $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

- $\forall n \in \mathbf{N}: \ I_{n+1} \subset I_n$,
- $\lim_{n\to\infty}$ *délka* $I_n = 0$.

Potom $\bigcap_{n=1}^\infty I_n$ je jednobodová množina.

2.5 Hlubší věty o limitě posloupnosti

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbf{R}^\star$ nazýváme **hromadnou hodnotou** posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}$ značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 2.15 (Bolzano-Weierstassova věta)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Věta 2.16. *(i) Nechť posloupnost $\{a_n\}$ není shora omezená. Potom $+\infty \in H(\{a_n\})$.*

(ii) Nechť posloupnost $\{a_n\}$ není zdola omezená. Potom $-\infty \in H(\{a_n\})$.

Důsledek. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pak $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Supremum množiny $H(\{a_n\})$ nazýváme **limes superior** a značíme $\limsup a_n$. Infimum množiny $H(\{a_n\})$ nazýváme **limes inferior** a značíme $\liminf a_n$.

Věta 2.17. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Pak platí*

(i) $\limsup a_n \in H(\{a_n\})$,

(ii) jestliže $x > \limsup a_n$, pak existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro každé $n \in \mathbf{N}, \ n \geq n_0$, platí $a_n < x$.

Navíc $\limsup a_n$ je jediné číslo splňující (i) a (ii). Analogické tvrzení platí pro $\liminf a_n$.

Důsledek. *Platí:* $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ *a* $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$.

Věta 2.18. *Platí:* $\lim a_n = A \in \mathbf{R}^\star$ *právě tehdy, když*

$$\limsup a_n = \liminf a_n = A \in \mathbf{R}^\star.$$

Věta 2.19. *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti reálných čísel,* $n_0 \in \mathbf{N}$ *a platí* $a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$. *Pak platí*

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \textit{ a } \limsup a_n \leq \limsup b_n.$$

Věta 2.20. *Posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje* ***Bolzano-Cauchyovu podmínku****, tj.*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0\ \forall m \in \mathbf{N}, m \geq n_0 :\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 2.21 (Borelova věta)**.** *Nechť* I *je uzavřený interval a* $\mathcal{S}$ *je množina otevřených intervalů taková, že* $I \subset \bigcup \mathcal{S}$. *Potom existuje konečná množina* $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ *taková, že* $I \subset \bigcup \mathcal{S}_0$.