Matematická analýza 1a

3. Číselné řady

3.1 Základní pojmy

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m*-**tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1 Základní pojmy

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1 Základní pojmy

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje.

3.1 Základní pojmy

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3.1 Základní pojmy

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

3.1 Základní pojmy

Věta 3.1 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim a_n = 0$.

Věta 3.2

(i) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konverguje.*

3.1 Základní pojmy

Věta 3.2

(i) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konverguje.*

(ii) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *konverguje.*

3.1 Základní pojmy

Věta 3.2

(i) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ *konverguje.*

(ii) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady. Potom* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *konverguje.*

(iii) *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když platí*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$$
$$\forall m \in \mathbf{N}, m > n : \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right| < \varepsilon.$$

Věta 3.3 (srovnávací kritérium)

Nechť $n_0 \in \mathbf{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.3 (srovnávací kritérium)

Nechť $n_0 \in \mathbf{N}$. *Dále nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Věta 3.4 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in \mathbf{R}^{\star}$.

(i) *Nechť* $c \in (0, \infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.4 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť* $c \in (0,\infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) *Nechť* $c = 0$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 3.4 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in \mathbf{R}^\star$.

(i) *Nechť* $c \in (0, \infty)$. *Potom* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) *Nechť* $c = 0$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) *Nechť* $c = \infty$. *Pak konverguje-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *konverguje i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom platí:

(i) *Existuje-li $q \in (0,1)$ takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) *Je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \sqrt[n]{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

(v) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.6 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.6 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Existuje-li* $q \in (0, 1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Věta 3.6 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.6 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Existuje-li* $q \in (0, 1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 3.6 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Existuje-li* $q \in (0,1)$ *takové, že*

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$

potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

(ii) *Je-li* $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iii) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(iv) *Je-li* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, *pak neplatí* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je divergentní.*

Věta 3.7 (Cauchyovo kondenzační kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.8

Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$.

Věta 3.9 (Raabeovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

Věta 3.9 (Raabeovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Je-li* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.9 (Raabeovo kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

(i) *Je-li* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, *pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.10 (Leibnizovo kritérium)

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. *Nechť platí*

- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.10 (Leibnizovo kritérium)

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. *Nechť platí*

- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

3.2 Kritéria konvergence

Věta 3.11

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.